Глава I. Технология решения задач линейного программирования с помощью надстройки поиск решения в среде EXCEL

Общие сведения о работе с табличным процессором Excel

Рассмотрим некоторые аспекты работы с табличным процессором Excel, которые позволят упростить расчеты, необходимые для решения оптимизационных задач. Табличный процессор — это программный продукт, предназначенный для автоматизации обработки данных табличной формы.

Элементы экрана Excel. После запуска Excel на экране появляется таблица, вид которой показан на рис. 1.1.

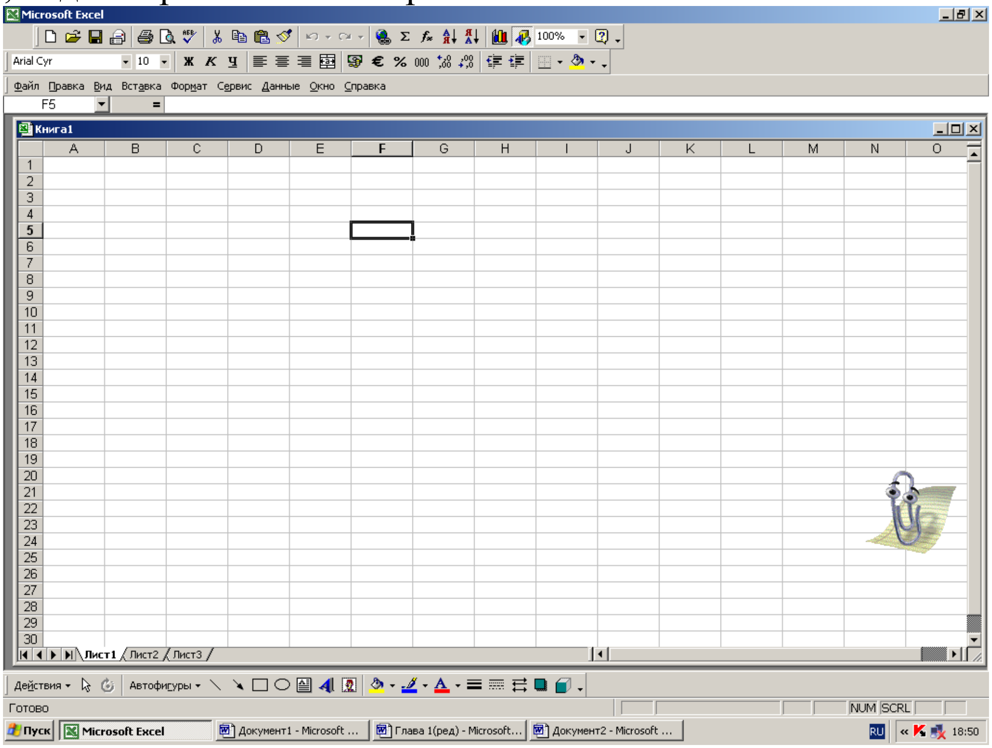


Рис. 1.1. Рабочий лист Excel

Это изображение называют рабочим листом. Оно представляет собой сетку строк и столбцов, пересечения которых образуют прямоугольники, называемые ячейками. Рабочие листы предназначены для ввода данных, выполнения расчетов, организации информационной базы и т.п. Окно Excel отображает основные программные элементы: строку заголовка, строку меню, строку состояния, кнопки управления окнами.

Работа с формулами. В программах электронных таблиц формулы служат для выполнения множества разнообразных расчетов. С помощью Excel можно быстро создать формулу. Формула состоит из трех основных частей:

1) знака равенства;

2) совокупности значений или ссылок на ячейки, с которыми выполняются расчеты;

3) операторов,

Если знак равенства отсутствует, то Excel интерпретирует данные не как формулу, а как ввод данных в ячейку. Формулы можно вводить непосредственно в ячейку или в строку формул — как текст, так и число. При этом нужно выполнить следующие действия:

- выделить ячейку, которая должна содержать формулу и ввести знак (=);
- ввести оператор или знак действия;
- выделить другую ячейку, включаемую в формулу;
- опять ввести оператор и так далее, пока не завершится ввод формулы;
- нажать на клавишу Enter.

В строке формул появится введенная формула, в ячейке — результат расчета.

Использование в формулах функций. Чтобы облегчить ввод формул, можно воспользоваться функциями Excel. Функции — это встроенные в Excel формулы. Excel содержит множество формул. Они сгруппированы по различным типам: логические, математические, инженерные, статистические и др.

Для активизации той или иной формулы следует нажать кнопки Вставка, Функции. В появившемся окне Мастер функций слева содержится перечень типов функций. После выбора типа справа будет помещен список самих функций. Выбор функции осуществляется щелчком клавиши мыши на соответствующем названии.

Различные функции выполняют разные типы вычислений по определенным правилам. Когда функция является единичным объектом в ячейке рабочего листа, она начинается со знака (=), далее следует название функции, а затем — аргументы функции заключенные в скобки.

Поиск решения — это надстройка Excel, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если в меню Сервис отсутствует команда Поиск решения, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду Сервис => Надстройки и активизируйте надстройку Поиск решения. Если же этой надстройки нет в диалоговом окне Надстройки, то вам необходимо обратиться к панели управления Windows, щелкнуть на пиктограмме Установка и удаление программ и с помощью программы установки Excel (или Office) установить надстройку Поиск решения.

После выбора команд Сервис => Поиск решения появится диалоговое окно Поиск решения.

В диалоговом окне Поиск решения есть три основных параметра:

- Установить целевую ячейку.
- Изменяя ячейки.
- Ограничения.

Сначала нужно заполнить поле Установить целевую ячейку. Во всех задачах для средства Поиск решения оптимизируется результат в одной из ячеек рабочего листа. Целевая ячейка связана с другими ячейками этого рабочего листа с помощью формул. Средство Поиск решения использует формулы, которые дают результат в целевой ячейке, для проверки возможных решений. Можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или установить конкретное значение.

Второй важный параметр средства Поиск решения — это параметр Изменяя ячейки. Здесь указываются ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке. Для поиска решения можно указать до 200 изменяемых ячеек. К этим ячейкам предъявляется два основных требования: они не должны содержать формул и изменение их значений должно отражаться на изменении результата в целевой ячейке. Другими словами, целевая ячейка зависит от изменяемых ячеек.

Третий параметр, который нужно вводить на вкладке Поиск решения, — это ограничения.

Для решения задачи необходимо:

1) указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки);

2) ввести исходные данные;

3) ввести зависимость для целевой функции;

4) ввести зависимости для ограничений;

5) запустить команду Поиск решений;

6) назначить ячейку для целевой функции (установить целевую ячейку);

7) ввести ограничения;

8) ввести параметры для решения ЗЛП.

Рассмотрим технологию решения, используя условия примера 1.1 *(задача о костюмах).*

Экономико-математическая модель задачи

Пусть x_1, — число женских костюмов; x_2 — число мужских костюмов,

$$\mathbf{f(x)=10\cdot x_1+20\cdot x_2\to max}$$

Ограничения задачи имеют вид:

$x_1 + x_2 < 150$ — ограничение по труду;

$2 * x_1 + 0{,}5 * x_2 < 240$ — ограничение по лавсану;

$x_1 + 3{,}5 * x_2 < 350$ — ограничение по шерсти;

$x_2 > 60$ — ограничение по мужским костюмам;

$x_1 > 0$ — ограничение по женским костюмам.

Решение

1. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).

Обозначьте через x_1, x_2 количество костюмов каждого типа. В нашей задаче оптимальные значения вектора $\mathbf{\overline{X}=(x_1,x_2)}$ будут помещены в ячейках A2:B2, оптимальное значение целевой функции — в ячейке С3.

2. Ввести исходные данные.

Введите исходные данные задачи, как показано на рис. 1.2.

	A	B	C	D	E
1	X1	X2			
2					
3	10	20			
4	1	3,5		350	
5	2	0,5		240	
6	1	1		150	
7		1			
8					

Рис. 1.2. Введены исходные данные

3. Ввести зависимость для целевой функции.

- Поместить курсор в ячейку «СЗ», произойдет выделение ячейки.
- Поместить курсор на кнопку Мастер функций, расположенную на панели инструментов.
- Ввести Enter. На экране появляется диалоговое окно Мастер функций шаг 1 из 2.
- В окне Категория выбрать категорию Математические.
- В окне Функции выбрать строку СУММПРОИЗВ (рис. 1.3).

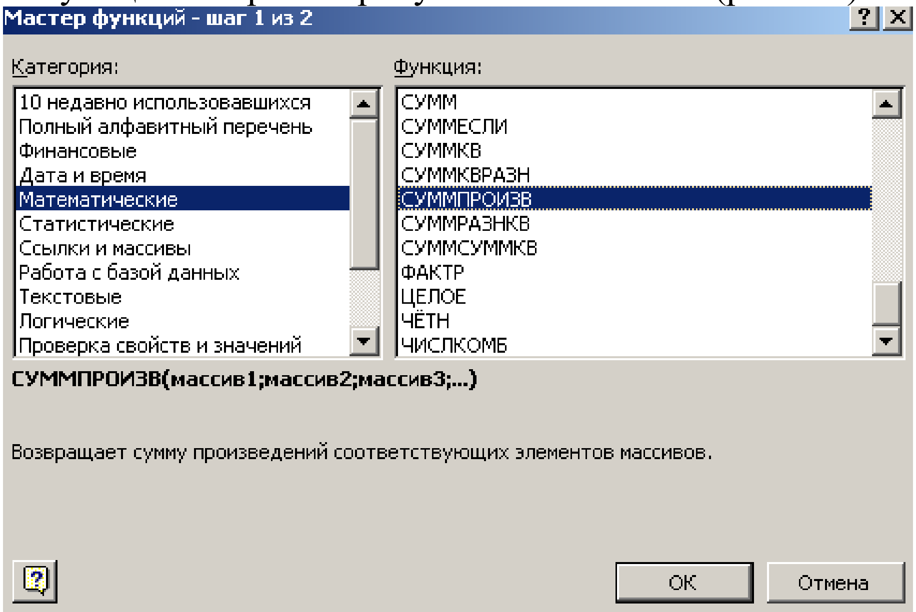


Рис. 1.3. Выбор функции

На экране появляется диалоговое окно СУММПРОИЗВ (рис. 1.4).

- В строку Массив I[1] ввести А2:В2.
- В строку Массив 2 ввести А3:В3.

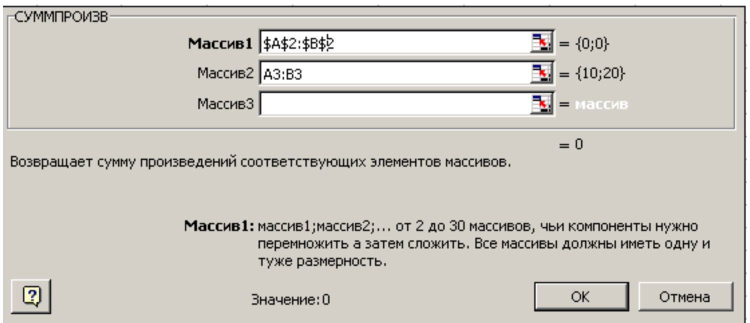


Рис. 1.4. Ввод данных для функции СУММПРОИЗВ

Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а помещая курсор мыши в ячейки, чьи адреса следует ввести.

Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку.

На рис. 1.5 показано, что в ячейку С3 введена функция.

СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ($A$2:$B$2;A3:B3)

	A	B	C	D	E	F
1	X1	X2				
2						
3	10	20	;A3:B3)			
4	1	3,5		350		
5	2	0,5		240		
6	1	1		150		
7		1				

Рис. 1.5. Введена зависимость для целевой функции

4. Ввести зависимости для ограничений (рис. 1.6).

- Поместить курсор в ячейку С3.
- На панели инструментов кнопка Копировать в буфер.
- Поместить курсор в ячейку С4.

	A	B	C	D	E	F
1	X1	X2				
2						
3	10	20	0			
4	1	3,5	0	350		
5	2	0,5	0	240		
6	1	1	0	150		
7		1	0			
8						

Рис. 1.6. Введены зависимости для всех ограничений

- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку С5.
- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку Сб.
- На панели инструментов кнопка Вставить из буфера.
- Поместить курсор в ячейку С7.
- На панели инструментов нажать кнопку Вставить из буфера. (Содержимое ячеек С4—С7 необходимо проверить. Они обязательно должны содержать информацию, как это показано для примера на рис. 1.7; в качестве примера представлено содержимое ячейки С5.).

C5 =СУММПРОИЗВ($A$2:$B$2;A5:B5)

	A	B	C	D	E	F
1	X1	X2				
2						
3	10	20	0			
4	1	3,5	0	350		
5	2	0,5	0	240		
6	1	1	0	150		
7		1	0			
8						

Рис. 1.7. Проверка содержимого ячейки С5

- В строке Меню указатель мышки поместить на Сервис. В развернутом меню выбрать команду Поиск решения. Появляется диалоговое окно Поиск решения (рис. 1.8).

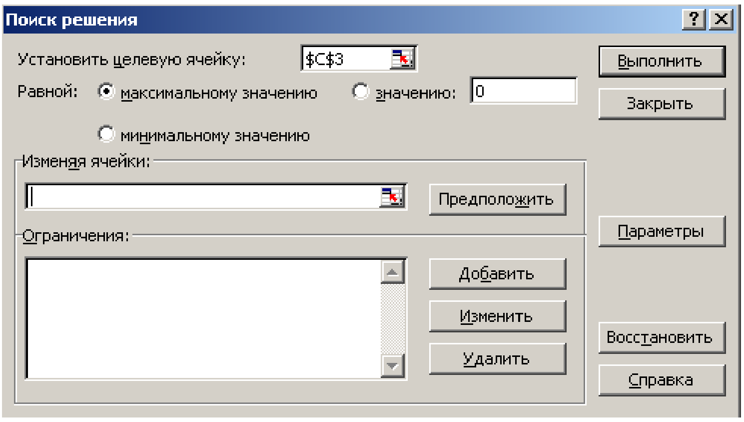


Рис. 1.8. Меню Поиск решения

5. Запустить команду Поиск решения.

6. Назначить ячейку для целевой функции (установить целевую ячейку), указать адреса изменяемых ячеек.

Поместить курсор в строку Установить целевую ячейку.

Ввести адрес ячейки $C$3.

Ввести тип целевой функции в зависимости от условия вашей задачи. Для этого отметьте, чему равна целевая функция — Максимальному значению или Минимальному значению.

Поместить курсор в строку Изменяя ячейки.

Ввести адреса искомых переменных A$2:B$2 (рис. 1.9).

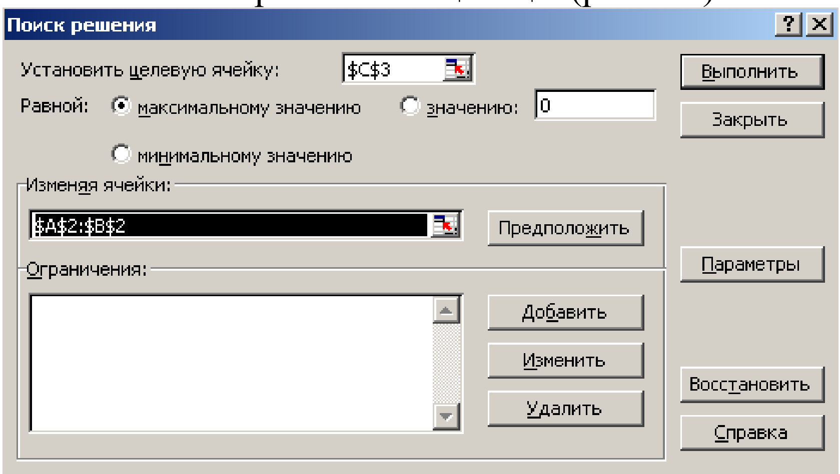


Рис. 1.9. Ввод адресов исходных переменных

7. Ввести ограничения.

- Поместить указатель мыши на кнопку Добавить. Появляется диалоговое окно Добавление ограничения.
- В строке Ссылка на ячейку ввести адрес $C$4.
- Ввести знак ограничения.
- В строке Ограничение ввести адрес $B$4 (рис. 1.10).

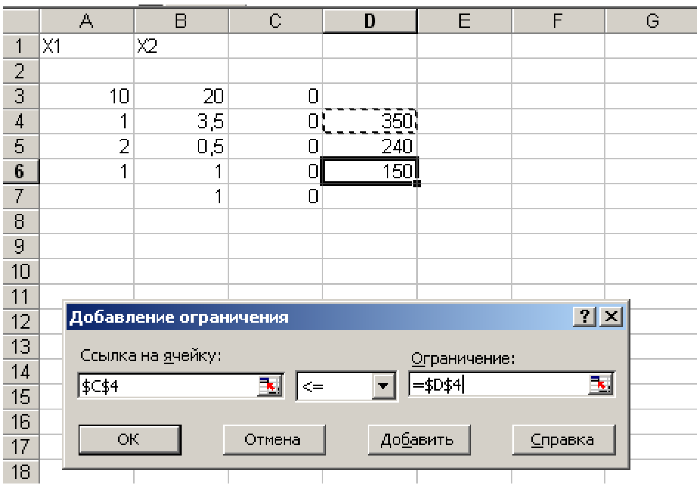


Рис. 1.10. Добавить ограничения

• Поместить указатель мыши на кнопку Добавить. На экране вновь появится диалоговое окно Добавление ограничения.

• Ввести остальные ограничения задачи по вышеописанному алгоритму.

• После введения последнего ограничения нажать на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рис. 1.11).

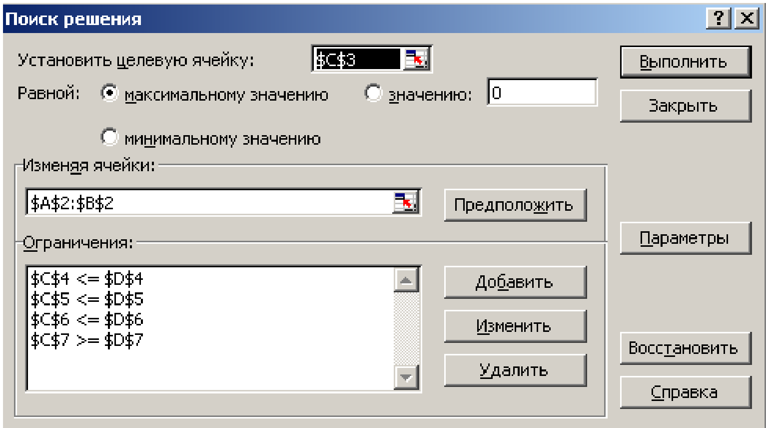


Рис. 1.11. Введены все условия задачи

8. Ввести параметры для решения задачи линейного программирования.

• В диалоговом окне поместить указатель мышки на кнопку Параметры. На экране появится диалоговое окно Параметры поиска решения (рис. 1.12).

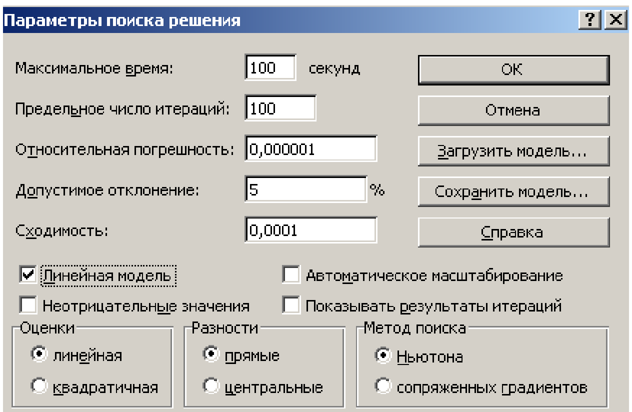


Рис. 1.12. Ввод параметров

- Установить флажки в окнах Линейная модель (это обеспечит применение симплекс-метода) и Неотрицательные значения.
- Поместить указатель мыши на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно Поиск решения.
- Поместить указатель мыши на кнопку Выполнить.

Через непродолжительное время появятся диалоговое окно Результаты поиска решения и исходная таблица с заполненными ячейками А3:В3 для значений x, и ячейка С3 с максимальным значением целевой функции (рис. 1.17).

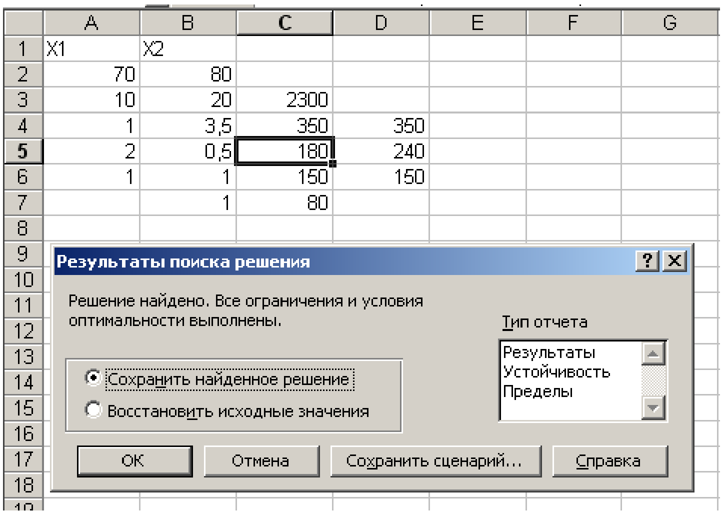


Рис. 1.17. Решение получено

Если указать тип отчета Устойчивость, то можно получить дополнительную информацию об оптимальном решении (рис. 1.18).

Microsoft Excel 9.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 11.11.2006 22:33:07

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$A$2	X1	70	0	10	10	4,285714286
$B$2	X2	80	0	20	15	10

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$C$4		350	4	350	1E+30	100
$C$5		180	0	240	1E+30	60
$C$7		80	0	0	80	1E+30
$C$6		150	6	150	23,07692308	1E+30

Рис. 1.18. Содержимое протокола Устойчивость

В результате решения задачи был получен ответ: необходимо сшить 70 шт. женских костюмов и 80 шт. мужских костюмов, чтобы получить максимальную прибыль 2300 у.е.

Двойственность в задачах линейного программирования анализ полученных оптимальных решений

В 1975 г. наш соотечественник Л.В. Канторович был удостоен Нобелевской премии по экономике (совместно с американским экономистом Т. Купмансом) за разработку теории оптимального использования ресурсов

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной; первоначальная задача называется *исходной,* или *прямой.* Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Переменные двойственной задачи y_i называются *объективно обусловленными оценками,* или двойственными оценками, или ценами» ресурсов, или теневыми ценами.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1) целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи - на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид ($\geq$), в задаче на минимум – ($\geq$)

2) малица А, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица A^T в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;

3) число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничении в системе двойственной задачи - числу переменных в исходной;

4) коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи - коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной;

5) каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи, номер переменной совпадает с номером ограничения. При этом ограничению, записанному в виде неравенства $\geq$, соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Модель исходной (прямой) задачи в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1,2,\ldots\ldots,m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

а модель двойственной задачи –

$$g(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad i = 1,2,......,m,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1,2,........,m$$

Две приведенные задачи образуют пару симметричных двойственных задач. Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

Первая теорема двойственности. Для взаимно двойственных задач имеет место один из взаимоисключающих случаев.

1 . В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$f^*(\overline{X}) = g^*(\overline{Y}).$$

2. Б прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости). Пусть:

Х = (x_1, x_2, ... $x_п$) — допустимое решение прямой задачи, а

У = (y_1,y_2, ... ,$y_т$) — допустимое решение двойственной задачи.

Для того чтобы они были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &y\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i\right) = 0; \\ &x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j\right) = 0. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Условия (1.1) позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Рассмотрим еще одну теорему, выводы которой будут использованы в дальнейшем.

Теорема об оценках. *Значения переменных* y_i *в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов* b_i *системы ограничений (неравенств) прямой задачи на величину:*

$$\Delta f(X) = \Delta b_i \cdot y_i.$$

Решая ЗЛП симплекс-методом, мы одновременно решаем двойственную ЗЛП. Переменные двойственной задачи y_i- называют объективно обусловленными оценками.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере *задачи о коврах.*

Пример 1.2. Используя постановку задачи о коврах, выполнить следующие задания.

1. Сформулировать экономико-математическую модель задачи о коврах на максимум общей стоимости продукции, используя данные табл. 1.1.

2. Используя Поиск решения, найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

3. Сформулировать экономико-математическую модель двойственной задали к задаче о коврах.

4. Найти оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности, пояснить равенство нулю X_1 и X_4.

5. Используя протоколы Поиска решения, выполнить анализ полученного оптимального решения исходной задачи.

6. Определить, как изменится общая стоимость и план выпуска продукции при увеличении запаса ресурса труд на 12 ед.

Решение

1. Сформулируем экономико-математическую модель задачи.

Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 число ковров каждого типа. Целевая функция имеет вид:

$$\mathbf{f(X) = 3 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + X_4 \to max}$$

а ограничения по ресурсам:

$$\mathbf{7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 6 \cdot X_4 \le 80,}$$
$$\mathbf{5 \cdot X_1 + 8 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 \le 480}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + \quad \cdot X_3 + 8 \cdot X_4 \le 130}$$
$$\mathbf{X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0.}$$

2. Поиск оптимального плана выпуска.

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск решения. Технология решения задачи была подробно рассмотрена в *задаче о костюмах.* В нашей задаче оптимальные значения вектора X = (X_1, X_2, X_3, X_4) будут помещены в ячейках B3:E3, оптимальное значение целевой функции — в ячейке F4.

Введем исходные данные. Сначала опишем целевую функцию с помощью функции — СУММПРОИЗВ (рис. 1.19). А потом введем данные для левых частей ограничений. В Поиске решения введем направление целевой функции, адреса искомых переменных, добавим ограничения. На экране появится диалоговое окно Поиск решения с введенными условиями (рис. 1.20).

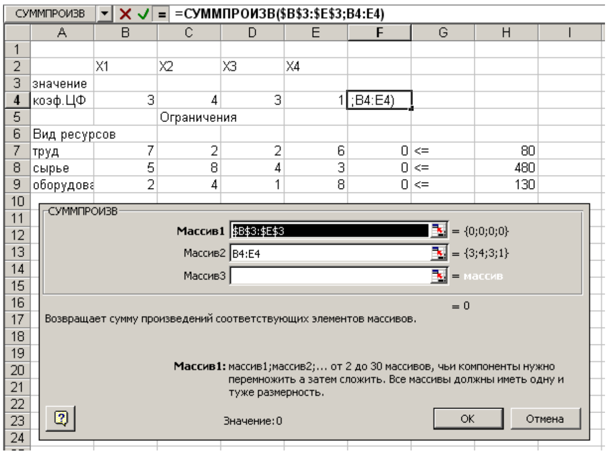


Рис. 1.19. Вводится функция для вычисления целевой функции

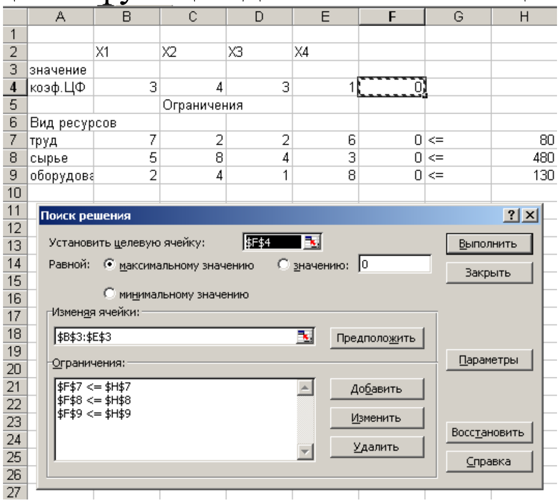


Рис. 1.20. Введены все условия задачи

После ввода параметров для решения ЗЛП следует нажать кнопку Выполнить. На экране появится сообщение, что решение найдено (рис. 1.21).

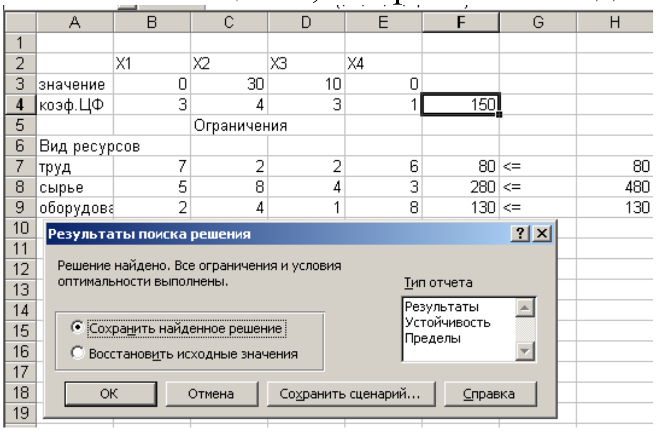


Рис. 1.21. Решение найдено

Полученное решение означает, что максимальный доход 150 тыс. руб. фабрика может получить при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида. При этом ресурсы «труд» и «оборудование» будут использованы полностью, а из 480 кг пряжи (ресурс «сырье») будет использовано 280 кг.

Создание отчета по результатам поиска решения. Excel позволяет представить результаты поиска решения в форме отчета (рис. 1.22).

Отчет создан: 12.11.2006 12:37:55

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$F$4	коэф.ЦФ	0	150

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$3	значение X1	0	0
$C$3	значение X2	0	30
$D$3	значение X3	0	10
$E$3	значение X4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$F$7	труд	80	$F$7<=$H$7	связанное	0
$F$8	сырье	280	$F$8<=$H$8	не связан.	200
$F$9	оборудование	130	$F$9<=$H$9	связанное	0

Рис. 1.22. Отчет по результатам

Существует три типа таких отчетов:

- Результаты (Answer). В отчет включаются исходные и конечные значения целевой и изменяемых ячеек, дополнительные сведения об ограничениях.
- Устойчивость (Sensitvity). Отчет, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в изменяемых ячейках или в формулах ограничений.

Пределы (Limits). Помимо исходных и конечных значений изменяемых и целевой ячеек, в отчет включаются верхние и нижние границы значений, которые могут принимать влияющие ячейки при соблюдении ограничений.

В отчете по результатам содержатся оптимальные значения переменных X_1, X_2, X_3, X_4, которые соответственно равны 0; 10; 30; 0; значение целевой функции — 150, а также левые части ограничений.

3. Сформулируем экономико-математическую модель двойственной задачи к задаче о коврах.

Неизвестные. Число неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. Исходная задача содержит 3 ограничения: по труду, сырью и оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче 3 неизвестных:

$У_1$ — двойственная оценка ресурса «труд», или «цена» труда;

$У_2$ — двойственная оценка ресурса «сырье», или «цена» сырья;

$У_3$ — двойственная оценка ресурса «оборудование», или «цена» оборудования.

Целевая функция двойственной задачи формулируется на минимум. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи:

$$\mathbf{g(\overline{Y}) = 80 \cdot Y_1 + 480 \cdot Y_2 + 130 \cdot Y_3 \rightarrow max}$$

Необходимо найти такие «цены» на ресурсы ($У_i$), чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной.

Ограничения. Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче. В исходной задаче 4 переменных, следовательно, в двойственной задаче 4 ограничения. В правых частях ограничений двойственной задачи стоят коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничений определяет стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы продукции. Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции:

$7у_1 + 5У_2 + 2У_3 > 3,$

$2\,у_1 + 8У_2 + 4У_3 > 4,$

$2у_1 + 4У_2 + У_3 > 3,$

$6\,у_1 + 3У_2 + 8У_3 > 1,$

$у_1, У_2, У_3 > 0.$ 4.

4. Найдем оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности.

Воспользуемся первым соотношением второй теоремы двойственности:

$$\mathbf{y}\left(\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{x_j} - \mathbf{b_i}\right) = \mathbf{0};$$

тогда

$У_1\,(7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 - 80) = 0,$

$У_2\,(5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 - 480) = 0,$

$У_3\,(2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 - 130) = 0.$

Подставим оптимальные значения вектора $\overline{\mathbf{X}}$ в полученные выражения

$У_1\,(7 * 0 + 2 * 30 + 2 * 10 + 6 * 0 - 80) = 0,$

$У_2(5 * 0 + 8 * 30 + 4 * 10 + 3 * 0 - 480) = 0,$

$У_3\,(2 * 0 + 4 * 30 + 1 * 10 + 8 * 0 - 130) = 0$

и получим

$У_1\,(80 - 80) = 0,$.

$У_2\,(280 - 480) = 0$, так как $280 < 480$, то $У_2 = 0$,

$У_3\,(130 - 130) = 0.$

Воспользуемся вторым соотношением второй теоремы двойственности

$$\mathbf{x_j}\left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} - \mathbf{c_j}\right) = \mathbf{0}; \quad \textbf{если} \quad \mathbf{x_j} > \mathbf{0}, \quad \textbf{то} \quad \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} = \mathbf{c_j}.$$

В нашей задаче $X_2 = 30 > 0$ и $X_3 = 10 > 0$, поэтому второе и третье ограничения двойственной задачи обращаются в равенства

$2 * У_1 + 8 * У_2 + 4 * У_3 = 4,$

$2 * У_1 + 4 * У_2 + 1 * У_3 = 3,$

$У_2 = 0.$

Решая полученную систему уравнений, находим $У_1$ и $У_3$.

Теневые цены ресурсов «труд», «сырье» и «оборудование» соответственно равны $Y_1 = 4/3$, $У_2 = 0$, $У_3 = 1/3$, или в десятичных дробях 1,3333; 0; 0,3333.

Проверим выполнение первой теоремы двойственности

$$\mathbf{g(\overline{Y}) = 80 \cdot Y_1 + 480 \cdot Y_2 + 130 \cdot Y_3 = 80 \cdot 4/3 + 480 \cdot 0 + 130 \cdot 1/3 = 150.}$$

$$\mathbf{f(\overline{X}) = 3 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + X_4 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 0 = 150.}$$

Это означает, что оптимальный план двойственной задачи определен верно.

Решение двойственной задачи можно найти, выбрав команду Поиск решений => Отчет по устойчивости.

Отчет по устойчивости. Отчет по устойчивости приводится в рис.1.23. Первая часть таблицы содержит информацию, относящуюся к переменным:

- Результат решения задачи.
- Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. табл. 1.2) нормированная стоимость для ковров первого вида равна -7 тыс. руб./шт. (строка 1). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (0; 30; 10; 0), попробуем включить в план выпуска один ковер первого вида, то новый план выпуска принесет нам доход 143 тыс. руб., что на 7 тыс. руб. меньше, чем прежнее оптимальное решение.

Microsoft Excel 9.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 12.11.2006 13:49:15

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	значение X1	0	-7	3	7	1E+30
\$C\$3	значение X2	30	0	4	8	1
\$D\$3	значение X3	10	0	3	1	1,75
\$E\$3	значение X4	0	-9,666666667	1	9,666666667	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$7	труд	80	1,333333333	80	150	15
\$F\$8	сырье	280	0	480	1E+30	200
\$F\$9	оборудование	130	0,333333333	130	30	90

Рис. 1.23. Отчет по устойчивости

- Коэффициенты целевой функции.
- Предельные значения приращения целевых коэффициентов $\mathbf{\Delta c_j}$, при

которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, *допустимое увеличение цены на ковер первого вида равно 7 тыс. руб./шт., а допустимое уменьшение — практически не ограничено* (строка 1 из табл. 1.2). Это означает, что если цена ковра первого вида возрастет более чем на *7 тыс. руб./шт.,* то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпускать X_1. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (0; 30; 10; 0) останется прежним. Во второй части табл. 1.2 содержится информация, относящаяся к ограничениям:

- Величина использованных ресурсов в колонке Результат. значение.

• Предельные значения приращения ресурсов Δb_i. В графе Допустимое уменьшение показано, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие фабрике выпускать больше ковров, чем в оптимальном решении, и получать более высокий доход. В рассматриваемой задаче такими ограничениями являются дефицитные ресурсы «труд» и «оборудование». Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид ≤, то возникает вопрос, на сколько максимально должен возрасти запас этих ресурсов, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе Допустимое увеличение. Ресурс «труд» имеет смысл увеличить самое большее на 150 чел./дней, а ресурс «оборудование» — на 30 станко/час. Ценность дополнительной единицы ресурса ; («теневая цена») рассчитывается только для дефицитных ресурсов.

5. Проведем анализ полученного оптимального решения
исходной задачи с помощью двойственных оценок.

• Анализ использования ресурсов в оптимальном плане выполняется с помощью второй теоремы двойственности:

если $У_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j = b_i$, i=1,…………m;

если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j < b_i$, $У_i = 0$, i =1,...,m.

Ресурсы «труд» и «оборудование» имеют отличные от нуля оценки 4/3 и 1/3 — эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане и являются дефицитными, т.е. сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям:

$7 * X_1 + 2 * X_2 + 2 * X_3 + 6 * X_4 \le 80,$

$2 * X_1 + 4 * X_2 + X_3 + 8 * X_4, \le 130,$

$7 * 0 + 2 * 30 + 2 * 10 + 6 * 0 = 80,$

$2 * 0 + 4 * 30 + 1 * 10 + 8 * 0 = 130.$

Ресурс «сырье» используется не полностью (280 < 480), поэтому имеет нулевую двойственную оценку ($Y_2 = 0$)-

$5 * X_1 + 8 * X_2 + 4 * X_3 + 3 * X_4 \le 480,$

$5 * 0 + 8 * 30 + 4 * 10 + 3 * 0 = 280 < 480.$

Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции. Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида составит 150 тыс. руб.:

$$g(\overline{Y}) = 80 \cdot Y_1 + 480 \cdot Y_2 + 130 \cdot Y_3 =$$

= 80 * 4/3 + 480 * 0 + 130 * 1/3 = 150 тыс. руб.

Согласно четвертому ограничению задачи не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Недефицитность ресурса возникает не из-за его неограниченных запасов (в задаче они ограничены величиной b_i,), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане. Так как суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию $\mathbf{f}(\vec{\mathbf{X}})$.

Заметим, что ценность различных видов ресурсов нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется его закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса только относительно полученного оптимального решения.

• Анализ эффективности отдельных изделий выполняется на основе соотношений из второй теоремы двойственности:

если $X_j > 0$, то $\sum\limits_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{Y_i} = \mathbf{c_j}$, j=1,………..n;

если $\sum\limits_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{Y}i < \mathbf{c_j}$, то $X_j = 0$, j =1,...,n.

Поясним равенства нулю X_1 и X_4. Если изделие вошло в оптимальный план ($X_j>0$), то в действительных оценках оно не убыточно, т.е. стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы изделия, равна его цене. Такие изделия эффективны, выгодны с точки зрения принятого критерия оптимальности. В нашей задаче – это ковры второго и третьего видов.

Если стоимость ресурсов, затраченных на производство одного изделия, больше его цены, то это изделие не войдет в оптимальный план из-за убыточности. В нашем примере в план выпуска не вошли ковры первого и четвертого видов, так как затраты по ним превышают цену 7 тыс. руб. (10-3-7) и 9,666 тыс. руб. (10,666-1=9,666) соответственно. Этот факт можно подтвердить, подставив в ограничения двойственной задачи оптимальные значения вектора Y:

7 * 4/3 + 5 * 0 +2 * 1/3 = 30/3 = 10 > 3,

2 * 4/3 + 8 * 0 + 4 * 1/3 = 12/3 = 4 =4,

2 * 4/3 + 4 * 0 +1 * 1/3 = 9/3 = 3 = 3,

6 * 4/3 +3 * 0 +8 * 1/3 = 32/3 = 10,666>1

Разница между правыми и левыми частями ограничений двойственной задачи можно найти в Отчете по устойчивости в столбце Нормируемая стоимость.

6. Анализ влияния изменения правых частей ограничений
на значение целевой функции (чувствительность решения
к изменению запасов сырья).

Предположим, что запас сырья ресурса «труд» изменился н 12 ед. , т.е. теперь он составляет 80 + 12 = 92 ед.

Из теоремы об оценках известно, что колебание b_i приводит к увеличению или уменьшению $\mathbf{f}(\vec{\mathbf{X}})$. Оно определяется величиной y_i в случае, когда при изменении величины b_i значение переменных y_i в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными. В нашей задаче увеличение запасов ресурса «труд» приведет к увеличению значения целевой функции на 16 тыс. руб.:

$$\Delta f(\overline{X}) = \Delta b_i y_i = 12 \cdot 4/3 = 16$$

Для двойственных оценок оптимального плана существенное значение имеет их предельный характер. Оценки являются точной мерой влияния ограничений на функционал лишь при малом приращении ограничения. Известно, что оценки не меняют своей величины, если не меняется набор векторов, входящих в базис оптимального плана, тогда как интенсивность этих векторов (значения неизвестных) в плане могут меняться.

Поэтому необходимо знать такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной ЗЛП, или интервалы устойчивости двойственных оценок, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы. Эту информацию можно получить из Отчета по устойчивости. В приведенном фрагменте отчета (рис 1.24.) видно, что запасы дефицитных ресурсов «труд» и «оборудование» могут быть как уменьшены, так и увеличены. Увеличение запаса ресурса «сырье» не влияет на план выпуска продукции.

Microsoft Excel 9.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 12.11.2006 17:02:08

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	значение X1	0	-7	3	7	1E+30
$C$3	значение X2	28	0	4	8	1
$D$3	значение X3	18	0	3	1	1,75
$E$3	значение X4	0	-9,666666667	1	9,666666667	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$7	труд	92	1,333333333	92	138	27
$F$8	сырье	296	0	480	1E+30	184
$F$9	оборудование	130	0,333333333	130	54	84

Рис1.24. Отчет по устойчивости

После увеличения запаса ресурса «труд» до 92 чел./час было получено новое решение задачи. Изменение запасов ресурсов в пределах интервалов устойчивости двойственных оценок привело не только к изменению значения целевой функции на 16 тыс. руб., но и к изменению плана выпуска. При этом структура плана не изменилась — изделия, которые были убыточны, не вошли и в новый план выпуска, так как цены на ресурсы не изменились. Новый план выпуска составляет 28 ковров второго вида и 18 ковров третьего вида. Изменение общей стоимости продукции на 16 тыс. руб. (24 - 8 = 16) получено за счет уменьшения плана выпуска на 2 ед. ковров второго вида по цене 4 тыс. руб. (4 * (28 - 30) = - 8 тыс. руб.) и увеличения на 8 ед. плана выпуска ковров третьего вида по цене 3 тыс. руб. (3 * (18 - 10) = 24 тыс. руб.).

ЗАДАНИЕ 1

Вариант №1

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 + 8x_2 + x_3 \to max,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2,$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = +3$$
$$x_i \geq 0; i = 1,2,3.$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \to max,$$
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = 7,$$
$$7x_1 + 5x_2 + 12x_3 = 19,$$
$$x_i \geq 0, = 1,2,3.$$

<u>Вариант 2</u>

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \to max,$$
$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2,$$
$$x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3,$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to min$$
$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 \leq 1$$
$$-x_1 + x_2 + \qquad x_4 \leq 1$$
$$x_2 + x_3 \qquad = 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

<u>Вариант 3</u>

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 3x_6 \to max,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = +3,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - 3x_6 = 1,$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 + x_6 = 1,$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots 6.$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to max,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15\\
&x_1 + x_4 \le 5\\
&x_2 + x_3 \ge 10\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Вариант 4

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 \to max,\\
&x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 = 9\\
&x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 25\\
&x_3 + x_4 + x_5 = 3\\
&x_i \ge 0, i = 1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \to \min,\\
&2x_1 + x_2 \ge 1,\\
&x_1 - x_2 \le 0,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Вариант 5

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 - 9x_7 - 8x_8 \to max,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - 5x_7 + 3x_8 = 15,\\
&x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 5x_7 + 3x_8 = 9,\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 - x_8 = 7\\
&x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 + x_8 = 9,\\
&x \ge 0, i = 1...8.
\end{aligned}
$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\to \min, \\ x_1 - x_2 \quad &= 1, \\ x_2 \quad &\le 1, \\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Вариант №6

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max, \\ &x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ &x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ &x_i \ge 0, i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\to max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 1, \\ x_2 + x_3 &\ge 0, \\ x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Вариант №7

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \to max, \\ &x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ &x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ &x_i \ge 0, i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 &\to max, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Вариант №8

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned}
&x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 \to max,\\
&x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,\\
&x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3,\\
&x_i \geq 0, i = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_{10} \to max\\
&x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_2 + x_3 \leq 1\\
&x_3 + x_4 \leq 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_9 + x_{10} \leq 1\\
&x_i \geq 0, i = 1,2...10.
\end{aligned}$$

Вариант №9

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to max,\\
&4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,\\
&x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12,\\
&x_i \geq 0, i = 1,...4.
\end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

1)

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_{11} \to min,\\
&x_1 + x_2 = 1,\\
&x_2 + x_3 = 1,\\
&x_3 + x_4 = 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{10} + x_{11} = 1.
\end{aligned}$$

Вариант №10

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 - 3x_5 \to \min, \\ &x_1 - x_2 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ &x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots 5. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_3 + x_4 \to max, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ &x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Вариант №11

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \to max, \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ &x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots 5. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \to max, \\ &3x_1 + x_2 \le 1, \\ &2x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_{1,2} \ge 0. \end{aligned}$$

Вариант №12

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min, \\ &x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ &-x_2 + x_3 + 2x_5 = -1, \\ &x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ &x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots 5. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 \to min\\
&x_1 - 3x_2 + x_3 = 1,\\
&2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 2,\\
&2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 2,\\
&x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

<u>Вариант №13</u>

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \to max,\\
&x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0,\\
&x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 - 2x_6 = 2,\\
&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 - 10x_5 - 5x_6 = 4,\\
&x_i \geq 0, i = 1,2...6.
\end{aligned}
$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 - x_3 \to max,\\
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 1;\\
&x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 1,\\
&x_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

<u>Вариант №14</u>

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + x_6 \to \min,\\
&x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5,\\
&2x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22,\\
&x_i \geq 0, i = 1,...6.
\end{aligned}
$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 \to min,\\
&x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\\
&x_i \geq 0, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Вариант №15

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 - x_2 - x_3 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 > 2,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 => 4,$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_6 = 9,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3,$$
$$x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 1,$$
$$x_4 + x_6 = 1,$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,...6.$$

Вариант №16

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to max,$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$
$$5x_1 + 6x_2 + x_3 = 20,$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$x_1 - 10x_2 + 100x_3 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 3,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \le -1,$$
$$-x_1 + 2x_3 \le 1,$$
$$x_1 + 2x_3 \ge 3,$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Вариант №17

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1) Решить симплексным методом. Сравнить полученное решение с решением, найденным геометрически.

F=**2**x_1-$x_2 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Вариант №18

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

F=$x_1 + x_2 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \leq 0, \\ 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

F=$2x_1 - x_2 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \geq 2, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -10, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Вариант №19

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

F=$x_1 - x_2 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq -8, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1) Решить симплексным методом. Сравнить полученное решение с решением, найденным геометрически.

F=$4x_1 - 2x_2 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Вариант №20

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$\boldsymbol{F}=2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le -1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

1) Решить симплексным методом.

$\boldsymbol{F}=-6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 \le -1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

Вариант №21

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$\boldsymbol{F}=x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

1) Решить симплексным методом.

$\boldsymbol{F}=x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + x_3 \le 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4$$

Вариант №22

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$\boldsymbol{F}=4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

1) Решить симплексным методом.

$\boldsymbol{F}$=$14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

Вариант №23

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &2x_1 + 10x_2 - 8x_3 \to \max, \\ &x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ &x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ &2x_1 - x_3 = 5 \\ &x_i \geq 0; i = 1,2,3. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ &3x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ &4x_1 + x_2 \geq 19 \\ &4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ &x_i \geq 0; i = 1,2,3. \end{aligned}$$

Вариант №24

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 \to \min, \\ &x_1 + x_2 \leq 6, \\ &2x_1 + x_2 \leq 12, \\ &x_1 \leq 4, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&5x_2 + 10x_4 \to \max,\\
&x_2 + x_3 + 7x_4 = 19\\
&3x_2 - 2x_4 + x_5 = 15\\
&x_1 + 12x_2 + x_4 = 16\\
&x_i \ge 0, i = 1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

Вариант №25

1) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max\\
&2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34\\
&4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16\\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

2) По данному функционалу и ограничениям составить текст прямой и двойственной к ней задачи и решить симплекс методом по программе EXCEL(ПОИСК РЕШЕНИЯ)

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \max\\
&7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 800\\
&5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 4800\\
&2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 1400\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Задание №2

Вариант 1.

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не менее 76, а содержание серы не более 0,38. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из 4$^{\underline{x}}$ компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости, октановом числе и содержании серы приведены в таблице:

Характеристика	**Компонент автомобильного бензина**			
	№1	**№2**	**№3**	**№4**
Октановое число	**68**	**72**	**80**	**90**
Содержание серы, %	**0,35**	**0,35**	**0,3**	**0,2**
Ресурсы, в тоннах	**700**	**600**	**500**	**300**
Себестоимость, ден. ед./т	**40**	**45**	**60**	**90**

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Вариант 2

. На участок строящейся дороги необходимо вывести 20000 м^3 каменных материалов. В районе строительства имеются три карьера с запасами 8000 м^3, 9000 м^3 и 10000 м^3. Для погрузки материалов используются экскаваторы, имеющие производительность 250 м^3 в смену в карьерах №1 и 2 и 500 м^3 в смену в карьере 3. Эти карьеры обеспечивают каменными материалами также ряд строящихся объектов. На погрузку материалов для данного участка выделены экскаваторы с общим лимитом 60 машино-смен с правом использования их по усмотрению строителей.

Транспортные затраты на перевозку материалов характеризуются показателями: для перевозки 10000 м^3 материалов из карьера 1 требуется 1000 автомобиле смен, из карьера 2 – 1350, из карьера 3 – 1700. Требуется найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий минимальные транспортные затраты.

Вариант №3.

Для производства продукции типа П$_1$ и П$_2$ предприятие использует два вида сырья: С$_1$ и С$_2$. Данные об условиях приведены в таблице:

Сырьё	Расход сырья на единицу продукции		Количество сырья, кг.
	П$_1$	П$_2$	
С$_1$	1	3	300
С$_2$	1	1	150
Прибыль, тыс. руб./ед. прод.	2	3	

Составить план производства по критерию «максимум прибыли».

Вариант №4.

Для приобретения оборудования, размещаемого на производственной площади 38 м^2, фирма выделяет 20 млн руб. Имеются оборудования двух типов: типа А стоимостью 5 млн руб, требующее производственную площадь 8 м^2 и имеющее производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и типа Б – стоимостью 2 млн. руб, занимающее площадь 4 м^2 и дающее за смену 3 тыс. единиц продукции. Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум производительности участка.

Вариант №5.

Для выпуска четырёх видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице:

Тип ресурса	Нормы затрат ресурсов на ед. продукции				Наличие ресурсов
	1	2	3	4	
Сырьё	25	20	12	14	360
Рабочее время	22	14	18	30	600
Оборудование	10	14	18	26	500
Прибыль на ед. продукции	20	15	18	16	

Сформулировать экономико-математическую модель задачу на максимум прибыли и найти оптимальный план выпуска продукции.

Вариант №6.

Фабрика выпускает три вида тканей, суточное плановое задание составляет не менее 60 м тканей первого вида, 50 м – второго и 40 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 830 единиц производственного оборудования, 900 единиц сырья и 850 единиц электроэнергии, расход которых на 1 метр ткани представлен в таблице:

Ресурсы	**Ткани**		
	I	**II**	**III**
Оборудование	**2**	**3**	**4**
Сырьё	**1**	**4**	**5**
Электроэнергия	**3**	**4**	**2**

Цена на 1 м ткани вида I - 50 д. е., II – 60 д. е., III – 70 д.е. Определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Вариант №7.

На основании информации, приведённой в таблице, составить план производства, максимизирующий объём прибыли.

Ресурсы	**Затраты ресурсов на единицу продукции**				**Наличие ресурсов**
	А	**Б**	**В**	**Г**	
Труд	**1**	**2**	**3**	**4**	**3000**
Сырьё	**5**	**6**	**4**	**2**	**2500**
Оборудование	**2**	**1**	**3**	**2**	**1200**
Прибыль на единицу продукции	**40**	**50**	**60**	**70**	

Вариант №8

. Автомобильный завод выпускает три вида автомобилей. Месячное плановое задание составляет не менее 10 автомобилей 1-го вида, 8 – второго, 6 – третьего. Суточные ресурсы следующие: 800 единиц производственного оборудования, 700 единиц сырья, 900 единиц электроэнергии и 1200 человеко-часов. Расход которых на 1 автомобиль представлен в таблице.

Ресурсы	**I**	**II**	**III**
Оборудование	**8000**	**9000**	**6500**
Сырьё	**7000**	**7500**	**6000**
Электроэнергия	**9000**	**1000**	**7800**
Трудозатраты	**12000**	**14000**	**9900**

Определить максимально возможный выпуск автомобилей при обеспечении ежемесячного плана выпуска каждого вида автомобиля.

Вариант №9.

На основании информации, приведённой в таблице, составить план приёма вкладов от населения, максимизирующий прибыль сбербанка.

Кварталы	**Виды вкладов**				**Ресурсы вкладов**
	простые	**срочные**	**депозитные**	**пенсионные**	
I кв.	**5000**	**10000**	**7000**	**4000**	**27000**

II кв.	**6000**	**6000**	**5000**	**3500**	**23000**
III кв.	**4000**	**3000**	**6000**	**3000**	**18000**
IV кв.	**7000**	**5000**	**7000**	**4000**	**25000**
Прибыль, % годовых	**15**	**18**	**28**	**20**	

Вариант №10.

. Необходимо обеспечить производство 400 тыс. однородных новых деталей, которые могут выпускаться в 4-х цехах предприятия. Разработанные для каждого цеха проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимости единицы изделия (см. таблицу).

Показатели	**Цеха**			
	1	**2**	**3**	**4**
Себестоимость	**85**	**90**	**95**	**100**
уд. кап. влож.	**120**	**80**	**50**	**40**

Для освоения 400 тыс. однородных изделий выделено 18 млн. руб. Необходимо найти такой вариант распределения объёмов производства продукции и капитальных вложений по цехам, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

Вариант №11.

Фабрика выпускает 4 вида тканей, суточное плановое задание составляет не менее 150 м тканей 1-го вида, 100 м – второго, 90 м – третьего, 120 м – четвёртого. Суточные ресурсы следующие: 1000 ед. производственного оборудования, 1200 ед. сырья и 900 единиц электроэнергии, расход которых на 1 метр ткани представлен в таблице.

Ресурсы	**Ткани**			
	I	**II**	**III**	**IV**
Оборудование	**1**	**4**	**3**	**5**
Сырьё	**2**	**5**	**2**	**7**
Электроэнергия	**3**	**6**	**1**	**6**

Цена за 1 кв. м ткани I-го вида – 90 д. е., II – 80 д. е., III – 70 д. е., IV – 60 д. е. Определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была минимальной.

Вариант №12.

. На основании информации, приведённой в таблице, составить план производства, максимизирующий объём прибыли.

Ресурсы	**Затраты ресурсов на ед. продукции**				**Наличие ресурсов**
	1	**2**	**3**	**4**	
Труд	**2**	**1**	**5**	**4**	**2500**
Сырьё	**3**	**2**	**7**	**2**	**3000**
Оборудование	**4**	**3**	**6**	**1**	**4000**
Прибыль на ед. продукции	**30**	**40**	**50**	**60**	

Вариант №13.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов .S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Прибыль получаемая от единицы продукции P_1 и P_2- соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вариант №14.

Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) .S_1, S_2, S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательное вещество (витамин)	**Необходимый минимум питательных веществ**	**Число единиц питательных веществ в 1 кг корма**	
		I	**II**
S_1	**9**	**3**	**1**
S_2	**8**	**1**	**2**
S_3	**12**	**1**	**6**

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 руб.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Вариант №15.

Для изготовления брусьев длиной 1,2 м., 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить экономико-математическую модель задачи.

Вариант №16.

Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Виды сырья	**Нормы расхода сырья на одно изделие, кг**		**Общее количество сырья, кг**
	А	**В**	
I	**12**	**4**	**300**
II	**4**	**4**	**120**
III	**3**	**12**	**252**
Прибыль от реализации одного, ден.ед.	**30**	**40**	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделие В надо выпустить менее, чем изделие А.

Вариант №17.

Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден.ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

Вариант №18.

На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден.ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	50
В	6	5	100	200	40
С	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более за 10 суток.

Вариант №19.

Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 и 3 м; при этом должно получиться равное количество брусков каждого размера.

Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилены (в один комплект входит по одному бруску каждого размера).

Вариант №20.

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. руб., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. руб. дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Вариант №21.

Фирма производит два популярных безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю произведенную продукцию, однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 час работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» - 0,04 час. Расход специального ингредиента составляет 0,01 и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 час времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Доход фирмы составляет 0,10 руб. за 1 л «Лимонада» и 0,30 руб. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно. Если цель фирмы состоит в максимизации ежедневного дохода?

Вариант №22.

Фирма производит три модели электронных реле. Каждая модель требует две стадии сборки. Время (в мин), необходимое для сборки на каждой станции, приведено в таблице.

Продукт	Стадия 1	Стадия 2	Прибыль	Заказ
Модель A	2,5	2,0	82,5	20
Модель B	1,8	1,6	70,0	20
Модель C	2,0	2,2	78,0	20
Ресурс	450	450		

Оборудование на каждой стадии 7,5 час в день. Менеджер хочет максимизировать прибыль за следующие 5 рабочих дней. Модель А дает прибыль 82,5 раб. За шт.; модель В – 70,0 руб.; модель С – 78,0 руб. фирма может продать все, что произведет, и, кроме того, у нее на следующую неделю есть оплаченный заказ на 60 шт. изделий (по 20 шт. устройства каждого типа).

1. Каков должен быть оптимальный производственный план?
2. Все ли типы моделей выгодно производить?
3. Если есть убыточная модель, то какие изменения надо внести, чтобы ее производство стало выгодным? Попробуйте изменить что–нибудь в ценовой политике или увеличить время работы оборудования (за счет сверхурочных) так, чтобы все модели стали выгодными. Опишите результаты ваших попыток.
4. Допустим, вы можете установить 2 сверхурочных часа для одной из стадий. Для какой именно стадии следует назначить эти сверхурочные часы, чтобы получить наибольшую прибыль?

Вариант №23.

Управляющему банка были представлены 4 проекта, претендующие на получение кредита в банке. Доступная наличность банка, потребности проектов и прибыль по ним приведены в таблице.

Проект	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4	Прибыль
A	8	8	10	10	21
B	7	9	9	11	18
C	5	7	9	11	16
D	9	8	7	6	17,5
Ресурс банка	22	25	38	30	

При оценке этих предложений следует принять во внимание потребность проектов в наличности и массу доступной наличности для соответствующих периодов.

Какие проекты следует финансировать и какое количество наличности необходимо в течение каждого периода. Если цель состоит в том, чтобы максимизировать прибыль?

Вариант №24.

Фирма планирует рекламную кампанию нового продукта. Отведенный на эти цели бюджет составляет 120 000 руб. Предполагается, что тираж рекламных объявлений долен составить не менее 800 млн экземпляров; объявления будут размещены в шести изданиях. Каждое издание имеет свой тираж (см. таблицу). Фирма подсчитала стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания.

№ издания	Стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания, руб.	Тираж одного выпуска, млн экз.
1	1474,2	9,9
2	1244,1	8,4
3	1131,0	8,2
4	700,7	5,1

5	**530,0**	**3,7**
6	**524,4**	**3,6**

Необходимо распространить рекламу с минимальными издержками при следующих ограничениях:

1) **в каждом издании реклама должна пройти в шести или более выпусках;**
2) **на любое издание может быть истрачено не более одной трети отпущенной суммы;**
3) **общая стоимость рекламы в третьем и четвертом изданиях не должна превышать 75 000 руб.**

Вариант №25.

Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 у.е. в расчете на 1 у.е., затраченную на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствами подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить 500 000 у.е.;
б) следует расходовать не более 40% бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши;
в) вследствие привлекательности для подростов радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планирует телевидение.

Сформулируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и решите ее.

Глава 2. Транспортная задача и ее реализация в среде Excel

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое приложение.

Постановка транспортной задачи. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у **m** поставщиков $\mathbf{A_i}$, в количестве a_i (**i = 1, ..., m**) единиц, необходимо доставить **n** потребителям $\mathbf{B_j}$ в количестве $\mathbf{b_j}$ - (**j = 1, ..., n**) единиц. Известна стоимость $\mathbf{c_{ij}}$-, перевозки единицы груза от поставщика **i** к потребителю **j** Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами вывести все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Сформулируем экономико-математическую модель транспортной задачи. Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от поставщика i к потребителю j Так как от поставщика i к потребителю j запланировано перевезти x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij} * x_{ij}$.

Транспортная задача относится к двухиндексным задачам линейного программирования, так как в результате решения задачи необходимо найти матрицу **X** с компонентами $\mathbf{x_{ij}}$.

Стоимость всего плана выразится двойной суммой:

$$\mathbf{Z} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{c_{ij}} \cdot \mathbf{x_{ij}}.$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,........,m$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b, \quad j, = 1,........,n$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение линейной функции:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}, \qquad (5.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,........,m, \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b, \quad j, = 1,........,n, \qquad (5.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad I=1, \quad m, \quad j=1, \quad n. \qquad (5.4)$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (5.5)$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (5.5), называется закрытой моделью; в противном случае - открытой. Для открытой модели может быть два случая:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \succ \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prec \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений. Найти минимальное значение линейной функции:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}.$$

при ограничениях: в случае «а»:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1,........,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b, \quad j, = 1,........,n, \quad x_{ij} \geq 0;$$

в случае «б»:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,........,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j, = 1,\dots\dots,n, \quad x_{ij} \ge 0;$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае «а», когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого описывается формулой:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

а для случая «б», когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого описываются формулой:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} bj - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет **n + m** уравнений с **m * n** неизвестными. Матрицу перевозок $X = (x_{ij})_{mn}$, удовлетворяющую условиям (5.2)— (5.4), называют *планом перевозок* транспортной задачи, а x_{ij} — перевозками.

План **X*,** при котором целевая функция (5.1) обращается в минимум, называется оптимальным.

Применение транспортных моделей

к решению некоторых экономических задач

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих ничего общего с транспортировкой груза. В этом случае величины тарифов C_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной экономической задачи. К таким задачам относятся:

- Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них C_{ij} является таким экономическим показателем, как производительность. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.
- Оптимальные назначения, или проблема выбора. Имеется **m** механизмов, которые могут выполнять **n** различных работ с производительностью C_{ij}. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности.
- Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.
- Решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости, тем самым в эту клетку не будут производиться перевозки.

Решение транспортной задачи с помощью средства Excel Поиск решения

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза $\mathbf{C_{ij}}$, слева указаны мощности поставщиков $\mathbf{a_i}$**,** а сверху — мощности потребителей $\mathbf{b_j}$,. Найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями **Xij.**

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	250	100	150	50
80	6	6	1	4
320	8	30	6	5
100	5	4	3	30
50	9	9	9	9

В данной задаче суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 550.$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, является *закрытой.*

Ввод условий задачи состоит из следующих шагов.

1. Создание формы для решения задачи.

Этот шаг предполагает *создание матрицы перевозок.* Для этого необходимо выполнить *резервирование изменяемых ячеек.,* поэтому в блок ячеек **B3:E6** вводятся «1» — так резервируется место, где после решения задачи будет находиться распределение поставок, обеспечивающее минимальные затраты на перевозку груза.

2. Ввод исходных данных.

В конкретном примере осуществляется ввод мощностей четырех поставщиков (ячейки **A10:A13**), потребности регионов в их продукции (**B9:E9**), а также удельные затраты по доставке нефтепродуктов от конкретного поставщика потребителю (блок **B10:E13**) (рис. 5.5).

	A	B	C	D	E
1					
2	Матрица перевозок (изменяемые ячейки)				
3		1	1	1	1
4		1	1	1	1
5		1	1	1	1
6		1	1	1	1
7					
8	Исходные данные				
9		250	100	150	50
10	80	6	6	1	4
11	320	8	30	6	5
12	100	5	4	3	30
13	50	9	9	9	9

Рис. 5.5 Ввод исходных данных и граничных условий.

Изменяемые ячейки - **B3:E6**.

В эти ячейки **B3:E6** будет записан оптимальный план перевозок – $\mathbf{x_{ij}}$

3. Ввод граничных условий.

3.1. *Вводим условия реализации мощностей поставщиков*

$$\mathbf{a_i = \sum_{j=1}^{n} x_j},$$

где $\mathbf{a}_i$ — мощность поставщика **i**; $\mathbf{x_{ij}}$— объем поставки груза от поставщика **i** к потребителю **j**; **n** —количество потребителей.

Для этого необходимо выполнить следующие операций:

- поместить курсор в ячейку **А3**;
- выбрать знак $\sum$;
- выделить необходимые для суммирования ячейки **В3:Е3**; нажать ENTER для подтверждения ввода формулы для суммирования.

Аналогичные действия выполнить для ячеек А4, А5, А6, т.е. ввести условия реализации мощностей всех поставщиков (для всех строк).

3.2. Вводим условия удовлетворения запросов потребителей, т.е.

$$\mathbf{b_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}},$$

где $\mathbf{b_j}$ — мощность потребителя **j**;

m — количество поставщиков.

Для этого необходимо выполнить следующие операции:

- поместить курсор в ячейку **В7**;
- выбрать знак $\sum$, при этом автоматически выделяется весь столбец **В3:В6**;
- нажать ENTER для подтверждения суммирования показателей выделенного столбца.

Эту же последовательность действий выполнить для ячеек **С7** и **Е7**

Таким образом, введены ограничения для всех поставщиков и всех потребителей.

4. Назначение целевой функции.

Для вычисления значения целевой функции, соответствующей минимальным суммарным затратам на доставку груза, необходимо зарезервировать ячейку и ввести формулу для ее вычисления

$$\mathbf{F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij}},$$

где $\mathbf{c_{ij}}$ — стоимость доставки единицы груза от поставщика **i** к потребителю **j**; $\mathbf{x_и}$ — объем поставки груза от поставщика **i** к потребителю **j**.

Для этого необходимо произвести следующие действия:

- поместить курсор в ячейку **В15** (после решения задачи в данной ячейке будет находиться значение целевой функции);
- запустить Мастер функций (значок $\mathbf{f_x}$*);*
- в окне Категория выбрать Математические;
- в окне Функция выбрать СУММПРОИЗВ;
- нажать кнопку ОК;
- в окне СУММПРОИЗВ указать адреса массивов, элементы которых обрабатываются этой функцией.

В задаче целевая функция представляет собой произведение удельных затрат на доставку груза (расположенных в блоке ячеек **B10:E13**) и объемов поставок для каждого потребителя (содержимое ячеек **ВЗ:Е6**). Для этого надо:

- в поле Массив 1 указать адреса **B10:E13**;
- в поле Массив 2 указать адреса **ВЗ:Е6**;
- нажать кнопку ОК —-подтверждение окончания ввода адресов массивов.

	A	B	C	D	E
1					
2	Матрица перевозок (изменяемые ячейки)				
3	4	1	1	1	1
4	4	1	1	1	1
5	4	1	1	1	1
6	4	1	1	1	1
7		4	4	4	4
8	Исходные данные				
9		250	100	150	50
10	80	6	6	1	4
11	320	8	30	6	5
12	100	5	4	3	30
13	50	9	9	9	9
14					
15	min	144			

Рис. 5.6. Введены зависимости из математической модели.

Выражение для вычисления значения целевой функции получено с помощью функции СУММПРОИЗВ (ВЗ:Е6, В10-.Е13)

В поле ячейки В15 появится некоторое числовое значение, равное произведению единичных поставок на удельные коэффициенты затрат по доставке грузов (в данной задаче — это число 144) (рис. 5.6).

5. Ввод зависимостей из математической модели.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- выбрать Сервис => Поиск решения;
- поместить курсор в поле Установить целевую (ячейку);
- ввести адрес **$B$15** (тем самым мы резервируем ячейку, куда после решения задачи помещается значение целевой функции) или поместить курсор в **B15**, а затем выбрать Поиск решения. При этом в поле адреса целевой ячейки будет автоматически введен адрес **$B$15**;
- установить направление изменения целевой функции, равное Минимальному значению;
- ввести адреса изменяемых ячеек **ВЗ:Е6**. Для этого необходимо:
- выбрать Изменяя ячейки;
- ввести адреса **$B$3:$E$6** или щелкнуть на красной стрелке рядом с этим полем, выйти в таблицу с матрицей перевозок, выделить блок ячеек **ВЗ:Е6**, щелкнуть на красной стрелке и вернуться в блок Поиск решения. Такая последовательность действий приводит к тому, что будут введены нужные адреса.

6. Ввод ограничений задачи.

В матрицу перевозок, содержащую исходные данные по задаче, необходимо ввести условие реализации мощностей всех поставщиков (рис. 5.7). Для этого необходимо:

- выбрать Добавить ограничения;
- в поле Ссылка на ячейку ввести адреса **$A$3:$A$6**;
- в среднем поле установить знак «=»;
- в поле Ограничение установить адреса $A$10:$A$13;
- для подтверждения введенного условия нажать кнопку OK.

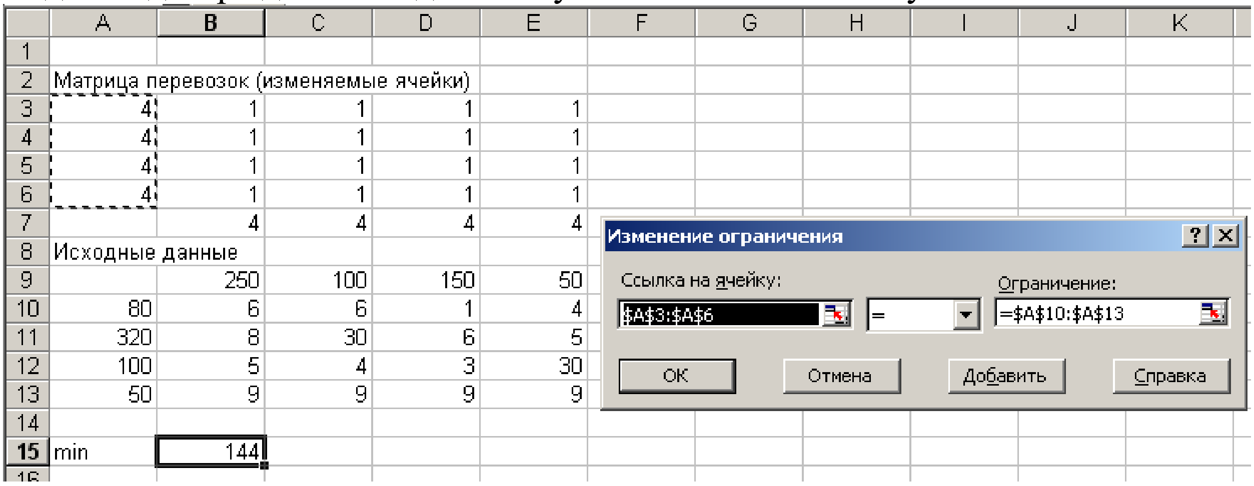


Рис. 5.7. Все грузы должны быть перевезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\ldots\ldots,m, \qquad \text{т.е.}\ A3:A6 = A10:A13$$

Далее вводится ограничение, которое реализует условие удовлетворения мощностей всех потребителей (рис. 5.8). Для этого необходимо:

- выбрать Добавить ограничения;
- в поле Ссылка на ячейку ввести адреса **$B$7:$E$7**;
- в поле знака выбрать при помощи спикера знак «=»;
- в поле Ограничение установить адреса **$B$9:$E$9**;
- нажать кнопку OK;
- после этого надо вернуться в поле Поиск решения;
- после ввода всех ограничений ввести OK. На экране появится окно Поиск решения с введенными ограничениями (рис. 5.9).

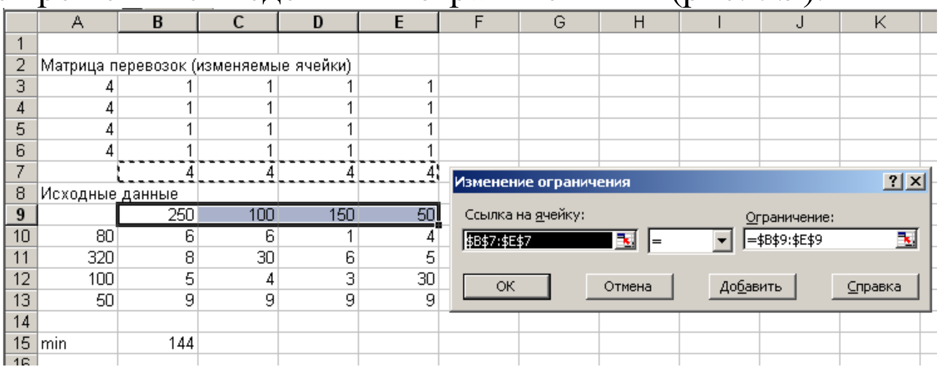


Рис. 5.8. Диалоговое окно «Добавление ограничений» Все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\ldots\ldots,n, \quad \text{т.е. } B7:E7 = B9:E9$$

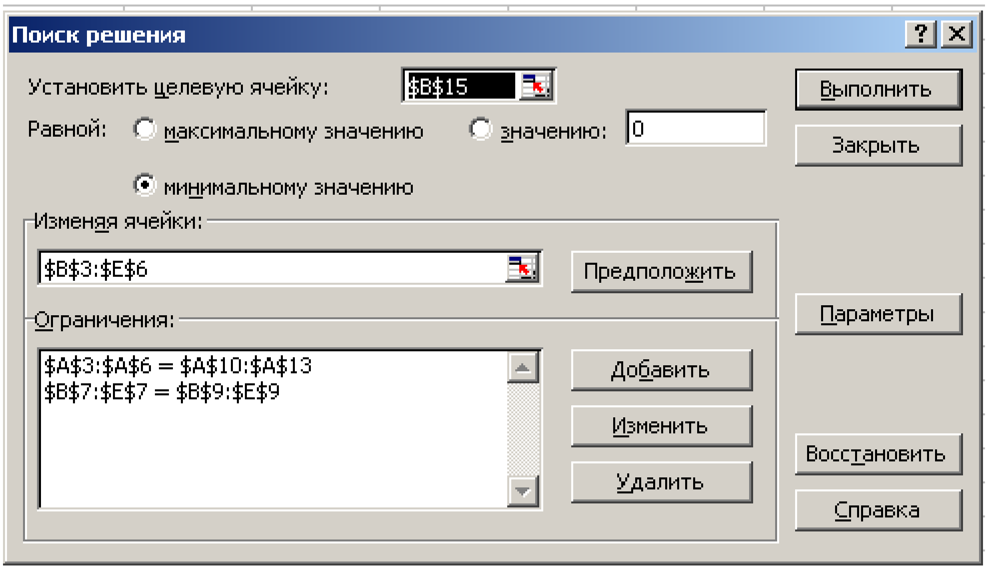


Рис. 5.9. Ввод зависимостей из математической модели

7. Ввод параметров.

С помощью окна Параметры можно вводить условия для решения оптимизационных задач. В нашей задаче следует установить флажок Неотрицательные значения и флажок Линейная модель. Нажать кнопку ОК. Опять появится диалоговое окно Поиск решения. Далее необходимо:

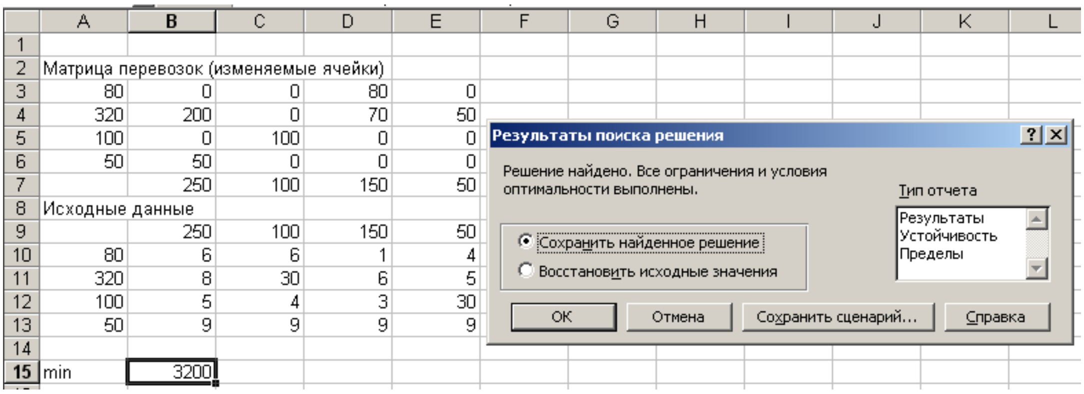
- щелкнуть по кнопке Параметры;
- выбрать переключатель Линейная модель;
- выбрать переключатель Неотрицательные значения (так как объемы поставок груза не могут быть отрицательными);
- нажать кнопку ОК. После этого произойдет переход в поле Поиск решения;
- нажать кнопку Выполнить.

Решение

Решение задачи выполняется сразу же после ввода данных, когда на экране находится диалоговое окно Поиск решения. Нажать кнопку Выполнить. На экране появится диалоговое окно Результаты поиска решения (рис. 5.10).

В результате нами был получен оптимальный план перевозок:

Матрица перевозок (изменяемые ячейки)				
80	0	0	80	0
320	200	0	70	50
100	0	100	0	0
50	50	2.13E-14	0	0
550	250	100	150	50



	A	B	C	D	E
1					
2	Матрица перевозок (изменяемые ячейки)				
3	80	0	0	80	0
4	320	200	0	70	50
5	100	0	100	0	0
6	50	50	0	0	0
7		250	100	150	50
8	Исходные данные				
9		250	100	150	50
10	80	6	6	1	4
11	320	8	30	6	5
12	100	5	4	3	30
13	50	9	9	9	9
14					
15	min	3200			

Рис. 5.10. Диалоговое окно Результаты поиска решения

План перевозок означает, что:
X_{13} = 80 ед. груза следует перевезти от поставщика 1 потребителю 3;
X_{21} = 200 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 1;
X_{23} = 70 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 3;
X_{24} = 50 ед. груза следует перевезти от поставщика 2 потребителю 4;
X_{32} = 100 ед. груза следует перевезти от поставщика 3 потребителю 2;
X_{41} = 50 ед. груза следует перевезти от поставщика 4 потребителю 1;
X_{42} = O ед. груза следует перевезти от поставщика 4 потребителю 2,
Общая стоимость перевозок = 3200.

Задание № 3

<u>Вариант №1</u>

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=35;\ a_2=70;$
$b_1=30;\ b_2=15;\ b_3=35;\ b_4=10.$

$$C=\begin{bmatrix}15\ 10\ 18\ 12\\ 22\ 14\ 30\ 15\end{bmatrix}$$

Вариант №2

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=75;\ a_2=65;$
$b_1=50;\ b_2=20;\ b_3=40;\ b_4=30.$

$$C=\begin{bmatrix}40\ 25\ 20\ 15\\ 10\ 30\ 30\ 20\end{bmatrix}$$

Вариант №3

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

a_1=40; a_2=20; a_3=40; a_4=20;
b_1=30; b_2=60; b_3=30.

$$C=\begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Вариант №4

Оптимизировать стоимость перевозки (Аi - поставщики, Вi - потребители)

a_1=25; a_2=55; a_3=20;
b_1=45; b_2=15; b_3=20; b_4=20.

$$C=\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Вариант №5

Оптимизировать стоимость перевозки (Аi - поставщики, Вi - потребители)

a_1=46; a_2=34; a_3=40;
b_1=4; b_2=3; b_3=2; b_4=5.

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Вариант №6

Оптимизировать стоимость перевозки (Аi - поставщики, Вi - потребители)

a_1=60; a_2=40; a_3=100; a_4=50;
b_1=30; b_2=80; b_3=65; b_4=35; b_5=40.

$$C=\begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант №7

Оптимизировать стоимость перевозки (Аi - поставщики, Вi - потребители)

$a_1=70;\ a_2=80;\ a_3=90;$

$b_1=20;\ b_2=60;\ b_3=70;\ b_4=50;\ b_5=40.$

$$C=\begin{bmatrix} 70 & 100 & 40 & 80 & 50 \\ 90 & 50 & 120 & 60 & 70 \\ 40 & 80 & 30 & 90 & 60 \end{bmatrix}$$

–

Вариант №8

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

$a_1=40;\ a_2=25;\ a_3=35;$

$b_1=15;\ b_2=40;\ b_3=30;\ b_4=15;$

$$C=\begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Вариант №9

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

$a_1=40;\ a_2=60;$

$b_1=20;\ b_2=50;\ b_3=30.$

$$C=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Вариант №10

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

$a_1=40;\ a_2=70;$

$b_1=30;\ b_2=60;\ b_3=20;$

$$C=\begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 7 \\ & & \end{bmatrix}$$

Вариант №11

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

$a_1=100;\ a_2=150;\ a_3=180;$

$b_1=\ 80;\ b_2=140;\ b_3=110;$

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант №12

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=70;\ a_2=130;$

$b_1=80;\ b_2=60;\ b_3=30;\ b_4=90;$

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Вариант №13

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=100;\ a_2=60;\ a_3=40;\ a_4=50;$

$b_1=30;\ b_2=70;\ b_3=20;\ b_4=60;\ b_5=40;\ b_6=30.$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант №14

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=7;\ a_2=3;\ a_3=15;$

$b_1=\ 12;\ \ b_2=13.$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант №15

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=20;\ a_2=16;\ a_3=14;\ a_4=22;$

$b_1=16;\ b_2=18;\ b_3=12;\ \ b_4=15$

$$C=\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Вариант №16

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=45;\ a_2=20;\ a_3=35;$

$b_1=10;\ b_2=20;\ b_3=30;\ b_4=40;$

$$C=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Вариант №17

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=60;\ a_2=30;\ a_3=45;\ a_4=25;$

$b_1=20;\ b_2=40;\ b_3=25;\ b_4=45;\ b_5=30.$

$$C=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

–

Вариант №18

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=20;\ a_2=30;\ a_3=30;$

$b_1=15;\ b_2=40;\ b_3=30;\ b_4=15;$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 12 \\ 6 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Вариант №19

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=50;\ a_2=55;$

$b_1=20;\ b_2=60;\ b_3=20.$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Вариант №20

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

a_1=60; a_2=70;
b_1=40; b_2=50; b_3=20;

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ & & \end{bmatrix}$$

Вариант №21

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

a_1=70; a_2=170; a_3=190;
b_1= 100; b_2=120; b_3=110;

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Вариант №22

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

a_1=50; a_2=100;
b_1=60; b_2=40; b_3=40; b_4=80;

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Вариант №23

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

a_1=80; a_2=70; a_3=30; a_4=70;
b_1=40; b_2=60; b_3=30; b_4=50; b_5=40; b_6=20.

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 & 3 & 7 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Вариант №24

Оптимизировать стоимость перевозки (A_i - поставщики, B_i - потребители)

$a_1=70;\ a_2=30;\ a_3=150;$
$b_1=\ 120;\ \ b_2=130.$

$$C=\begin{bmatrix}14 & 8\\ 10 & 12\\ 16 & 12\end{bmatrix}$$

Вариант №25

ОПТИМИЗИРОВАТЬ СТОИМОСТЬ ПЕРЕВОЗКИ (A_I - ПОСТАВЩИКИ, B_I - ПОТРЕБИТЕЛИ)

$a_1=40;\ a_2=32;\ a_3=28;\ a_4=44;$
$b_1=32;\ b_2=36;\ b_3=24;\ \ b_4=30$

$$C=\begin{bmatrix}7 & 2 & 1 & 8\\ 3 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

Глава 3. методы и модели анализа и прогнозирования экономических процессов с использованием временных рядов

В современной экономике и в бизнесе без прогноза не обойтись. Любое серьезное решение, в особенности связанное с вложением денег, требует прогноза, предвидения развития экономической ситуации. В настоящее время разработано много методов прогнозирования, которые с той или иной степенью надежности предсказывают будущие события.

Имеется два подхода к прогнозированию. Первый — использование методов качественного прогнозирования. Эти методы применимы в тех ситуациях, когда данные за прошедшие периоды времени недоступны и/или ненадежны, например, при прогнозировании объема продаж совершенно нового товара, не существовавшего ранее на рынке. Второй подход — использование количественных методов. В этом случае данные за прошедшие периоды времени доступны для исследователя.

Информационной базой для анализа экономических процессов являются динамические и временные ряды. Совокупность наблюдений некоторого явления (показателя), упорядоченная в зависимости от последовательности значений другого явления (признака), называют *динамическим рядом.* Динамические ряды, у которых в качестве признака упорядочения используется время, называют *временными.*

Если в течение длительного времени регулярно фиксировать курсы валют, акций, цены на товары, и т.д., то такие данные образуют временные ряды. Сюда относятся данные о выпуске или потреблении различных товаров и услуг по месяцам, кварталам, годам. В производстве временные ряды возникают при:

- измерении количества изделий, выпускаемых подразделениями предприятия за некоторую единицу времени (час, смену, декаду);
- оценках количества брака за тот же период времени;

- наблюдении за изменениями запасов на складах.

В экономике и бизнесе временные ряды — это очень распространенный тип данных. Во временном ряде содержится информация об особенностях и закономерностях протекания процесса, а статистический анализ позволяет выявить закономерности и использовать их для оценки характеристик процесса в будущем, т.е. для прогнозирования.

Временной ряд — это набор чисел, привязанный к последовательным, обычно равноотстоящим моментам времени. Числа, составляющие временной ряд и получающиеся в результате наблюдения за ходом некоторого процесса, называются *уровнями* временного ряда, или *элементами.* Интервал между двумя последовательными моментами времени называют *тактом* (шагом, квантом). Под длиной временного ряда понимают количество входящих в него уровней *n.* Временной ряд обычно обозначают Y(t), или y_t, где t= *1,2, ..., n.*

Формально задача прогнозирования сводится к получению оценок значений ряда для некоторого периода будущего, т.е. к получению значения

$У_{прогноз}$(t), где t= n + 1, n + 2, ... При использовании методов экстраполяции исходят из предположения о сохранении закономерностей прошлого развития на период прогнозирования. Во многих случаях (но не всегда!) при разработке оперативного (до года) и краткосрочного (до 2 лет) прогноза эти предположения являются справедливыми.

Статистические методы исследования исходят из предположения возможности представлять уровни временного ряда в виде суммы нескольких компонент, отражающих закономерность и случайность развития, в частности, в виде суммы четырех компонент:

$$Y(t)=f(t)+S(t)+U(t)+E(t), \qquad (1)$$

где f(t) — тренд (долговременная тенденция) развития;

S(t) — сезонная компонента;

U((t) — циклическая компонента;

E(t) — остаточная компонента.

В модели временного ряда принято выделять две основные составляющие: детерминированную (систематическую) и случайную (рис. 1). Под детерминированной составляющей временного ряда y_1, y_2, ..., y_n понимают числовую последовательность, элементы которой вычисляются по определенному правилу как функция времени t. Исключив детерминированную составляющую из данных, мы получим колеблющийся вокруг нуля ряд, который может в одном предельном случае представлять случайные скачки, а в другом — плавное колебательное движение.

Детерминированная составляющая может содержать следующие структурные компоненты.

1. Тренд, или тенденция f(t), представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени. В качестве примера таких факторов в экономике можно назвать:

а) изменение демографических характеристик популяции (численности, возрастной структуры);

б) технологическое и экономическое развитие;

в) рост потребления.

Обычно тренд (тенденция) описывается с помощью той или иной неслучайной функции $F_{тр}(t)$ (аргументом которой является время), как правило, монотонной. Эту функцию называют функцией тренда, или просто — трендом.

2. Сезонная компонента S(t) связана с наличием факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Это регулярные колебания, которые носят периодический или близкий к нему характер и заканчиваются в течение года. Типичные примеры сезонного эффекта: изменение загруженности автотрассы в течение суток, по дням недели, временам года, пик продаж товаров для школьников в конце августа — начале сентября. Сезонная компонента со временем может меняться либо иметь плавающий характер.

3. Циклическая компонента U(t) — неслучайная функция, описывающая длительные периоды (более одного года) относительного подъема и спада и состоящая из циклов переменной длительности и амплитуды. Примером циклической (конъюнктурной) компоненты являются волны Кондратьева, демографические «ямы» и т.п. Подобная компонента весьма характерна для рядов макроэкономических показателей. Здесь циклические изменения обусловлены взаимодействием спроса и предложения, а также наложением таких факторов, как истощение ресурсов, погодные условия, изменения в налоговой политике и т.п. Отметим, что циклическую компоненту крайне трудно идентифицировать формальными методами, исходя только из данных изучаемого ряда.

4. Случайная составляющая ряда отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера и может иметь разнообразную структуру, начиная от простейшей в виде «белого шума» до весьма сложных, описываемых моделями авторегрессии и скользящего среднего (рис. 1).

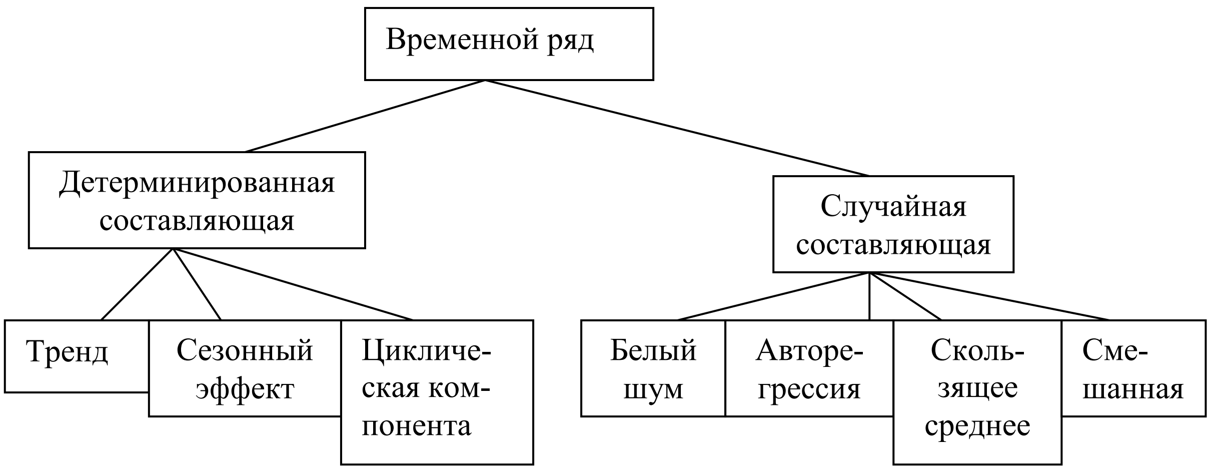


Рис. 1. Структурные компоненты временного ряда

Основная цель статистического анализа временных рядов — изучение

соотношения между закономерностью и случайностью в формировании значений уровней ряда, оценка количественной меры их влияния. Закономерности, объясняющие динамику показателя в прошлом, используются для прогнозирования его значений в будущем, а учет случайности позволяет определить вероятность отклонения от закономерного развития и его возможную величину.

Требования к исходной информации

Анализ временных рядов, отражающих развитие экономических процессов, начинается с оценки данных. Уровни исследуемого показателя обязательно должны быть сопоставимыми, однородными и устойчивыми, а их число должно быть достаточно велико.

Сопоставимость достигается в результате одинакового подхода к наблюдениям на разных этапах формирования динамического ряда. Уровни во временных рядах должны иметь одинаковые:

- единицы измерения;
- шаг наблюдений;
- интервал времени;
- методику расчета;
- элементы, относящиеся к неизменной совокупности.

Однородность данных означает отсутствие сильных изломов тенденций, а также *аномальных* (т.е. резко выделяющихся, нетипичных для данного ряда) наблюдений. Аномальные наблюдения проявляются в виде сильного изменения уровня — скачка или спада — с последующим приблизительным восстановлением предыдущего уровня. Наличие аномалии резко искажает результаты моделирования. Поэтому аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда, заменив их расчетными значениями.

Устойчивость характеризуется преобладанием закономерности над случайностью в изменении уровней ряда. На графиках устойчивых временных рядов закономерность прослеживается визуально, на графиках неустойчивых рядов изменения последовательных уровней представляются хаотичными, и поэтому поиск закономерностей в формировании значений уровней таких рядов лишен смысла.

Требование полноты данных обусловливается тем, что закономерность может обнаружиться лишь при наличии минимально допустимого объема наблюдений.

Этапы построения прогноза по временным рядам

Экстраполяционное прогнозирование экономических процессов, представленных одномерными временными рядами, сводится к выполнению следующих основных этапов:

1) предварительный анализ данных;

2) построение моделей: формирование набора аппроксимирующих функций (кривых роста) и численное оценивание параметров моделей;

3) проверка адекватности моделей и оценка их точности;

4) выбор лучшей модели;

5) расчет точечного и интервального прогнозов

1. Предварительный анализ данных.

На этом этапе производится:

- выявление аномальных наблюдений;
- проверка наличия тренда;
- сглаживание временных рядов;
- расчет показателей развития динамики экономических процессов.

Так как наличие *аномальных* наблюдений приводит к искажению результатов моделирования, то необходимо убедиться в отсутствии аномалий данных. В качестве примера аномалии* может служить скачок курса доллара, зафиксированный в «черный вторник».

Для диагностики аномальных наблюдений разработаны различные критерии, например метод Ирвина [1]. Для всех или только для, подозреваемых в аномальности наблюдений вычисляется величина λ_t:

$$\lambda_t = |y_t - y_{t-1}| / S_y,$$

$$\text{где } S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} y_t.$$

Если рассчитанная величина А,, превышает табличный уровень (например, для 10 наблюдений значение критерия Ирвина равно 1,5), то уровень у, считается аномальным. Аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда и заменить их расчетными значениями (самый простой способ замены — в качестве нового значения принять среднее из двух соседних значений). Следующая процедура этапа предварительного анализа данных — *выявление наличия тенденций* в развитии исследуемого показателя. Отметим, что тенденция прослеживается не только в увеличении или уменьшении среднего текущего значения временного ряда, но она присуща и другим его характеристикам: дисперсии, автокорреляции, корреляции с другими показателями и т.д. Тенденцию среднего визуально можно определить из графика исходных данных, а более точно — с помощью метода Фостера— Стюарта, метода проверки существенности разности средних и т.п., подробное описание которых дано в работе.

Наличие тенденции среднего уровня на графике становится более заметным, когда на нем отражены сглаженные значения исходных данных.

Процедура сглаживания необходима при построении некоторых математических моделей и для устранения аномальных наблюдений. Чаще всего для сглаживания применяются методы простой скользящей средней, взвешенной скользящей средней и экспоненциального сглаживания.

Традиционными показателями, характеризующими развитие экономических процессов, были и остаются *показатели роста и прироста.* Для характеристики динамики изменения экономических показателей все чаще используется понятие автокорреляции, которая характеризует не только взаимозависимость уровней одного и того же ряда, относящихся к разным моментам наблюдений, но и степень устойчивости развития процесса во времени, величину оптимального периода прогнозирования и т.п.

<u>Построение моделей.</u>

Для решения задач анализа и моделирования тенденций изменения исследуемого показателя используются *модели кривых роста.* Плавную кривую (гладкую функцию), аппроксимирующую временной ряд, принято называть кривой роста. Подбор такой кривой является аналитическим (не механическим) выравниванием. Чаще всего используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста. Примеры кривых роста:

- полином первой степени (прямая) $Y(t) = a_0 + a_1,*t$,
- полином второй степени (парабола) $Y((t) = a_0 + a_1*t + a_2*t^2$.

Математические методы позволяют представить прогнозирующую модель в виде полинома любого порядка. Однако без необходимости использование полиномов высокого порядка представляется излишним.

Параметры «кривых роста» оцениваются методом наименьших квадратов (МНК), т.е. подбираются таким образом, чтобы график функции «кривой роста» располагался на минимальном удалении от точек исходных данных.

Предпочтение, как правило, отдается простым моделям, допускающим содержательную интерпретацию. К числу таких моделей относится линейная модель роста

$$\mathbf{y_t = a_0 + a_1 \cdot t,} \tag{2}$$

где a_0 и a_1 — параметры модели, $t = 1, 2, ..., n$.

Математически критерий оценки параметров модели записывается в виде

$$\mathbf{S(a_0, a_1) = \sum_{t=1}^{n} \left[y_t - (a_0 + a_1 \cdot t) \right]^2 \to min}. \tag{3}$$

Для нахождения минимума функции двух переменных следует взять частные производные по a_0 и a_1 а затем приравнять их нулю. В результате получим так называемую систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{a_0 n + \sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} y_t} \\ \mathbf{a_0 \cdot \sum_{t=1}^{n} t + a_1 \cdot \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t \cdot t.} \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{a_1 = \left(\sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t}) \cdot (y_t - \overline{Y}) \right) / \sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2}, \\ \mathbf{a_0 = \overline{Y} - a_1 - a_1 \cdot t.} \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathbf{\bar{t}}$ **и** $\mathbf{\overline{Y}}$ - средние значения моментов наблюдения и уровней ряда соответственно.

<u>Оценка качества построенных моделей.</u>

Важным этапом прогнозирования социально-экономических процессов является проверка *адекватности* модели реальному явлению. Для этого исследуют ряд остатков $\mathbf{\varepsilon_t = y_1 - \overline{Y}_t}$, т.е. отклонения расчетных значений от фактических.

Для оценки адекватности построенных моделей исследуются свойства остаточной компоненты, т.е. расхождения уровней, рассчитанных по модели, и фактических наблюдений. Наиболее важными свойствами остаточной компоненты являются независимость уровней ряда остатков, их *случайность* и *соответствие нормальному закону распределения.*

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществляется в ходе проверки соответствующей нулевой гипотезы $\mathbf{H_0 / |\bar{\varepsilon}| = 0}$. С этой целью строится t-статистика:

$$\mathbf{t_{расч.}} = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{S_\varepsilon}\sqrt{\mathbf{n}},$$

где $\bar{\varepsilon}$ — среднее арифметическое значение уровней ряда остатков ε_t,;

$$\mathbf{S_\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{t=1}^{n}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2}{n-1}}$$ — среднеквадратическое отклонение для этой последовательности, рассчитанное по формуле для малой выборки.

На уровне значимости гипотеза отклоняется, если $t_{расч} > t_{a,v}$, где $t_{a,v}$ - критерий распределения Стьюдента с доверительной вероятностью (1 - a) и степенями свободы $v = n — 1$.

Проверка условия случайности возникновения отдельных отклонений от тренда. Здесь часто используется критерий, основанный на поворотных точках. Значение случайной переменной считается поворотной точкой, если оно одновременно больше (меньше) соседних с ним элементов. Если остатки случайны, то поворотная точка приходится примерно на каждые 1,5 наблюдения. Если их больше, то возмущения быстро колеблются, и это не может быть объяснено только случайностью. Если же их меньше, то последовательные значения случайного компонента положительно коррелированны.

Критерий случайности отклонений от тренда при уровне вероятности 0,95 можно представить как:

$$\mathbf{p} > \left[\frac{2}{3}\cdot(\mathbf{n}-2) - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{16\cdot \mathbf{n} - 29}{90}}\right], \qquad (6)$$

где p — фактическое количество поворотных точек в случайном ряду;

1,96 — квантиль нормального распределения для 5%-ного уровня значимости.

Квадратные скобки означают, что от результата вычисления следует взять целую часть (не путать с процедурой округления!).

Если неравенство не соблюдается, то ряд остатков нельзя считать случайным (т.е. он содержит регулярную компоненту), стало быть, модель не является адекватной.

Наличие (отсутствие) автокорреляции в отклонениях от модели роста проверяют с помощью критерия Дарбина—Уотсона. С этой целью строится статистика Дарбина—Уотсона («d-статистика), в основе которой лежит формула:

$$\mathbf{d}=\left(\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})^2\right)\Big/\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2. \qquad (7)$$

При отсутствии автокорреляции d ~ 2, а при полной автокорреляции равно 0 или 4. Следовательно, оценки, получаемые по критерию, являются не точечными, а интервальными. Верхние (d_2) и нижние (d_1) критические значения, позволяющие принять или отвергнуть гипотезу об отсутствии автокорреляции, зависят от количества уровней динамического ряда и числа независимых переменных модели. Значения этих границ для уровня значимости а = 0,05 даны в специальных таблицах. При сравнении расчетного значения d-статистики (7) с табличным могут возникнуть такие ситуации: $d_2 < d < 2$ — ряд остатков не коррелирован; $d < d_1$ — остатки содержат автокорреляцию; $d_1, < d < d_2$ — область неопределенности, когда нет оснований ни принять, ни отвергнуть гипотезу о существовании автокорреляции. Если d превышает 2, то это свидетельствует о наличии отрицательной корреляции. Перед сравнением с табличными значениями d критерий следует преобразовать по формуле $d^! = 4 - d$. Установив наличие автокорреляции остатков, переходят к улучшению модели. Если же ситуация оказалась неопределенной, применяют другие критерии. В частности, можно воспользоваться первым коэффициентом автокорреляции

$$\mathbf{r(1)}=\left(\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t\cdot\varepsilon_{t-1}\right)\Big/\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2. \qquad (8)$$

Для принятия решения о наличии или отсутствии автокорреляции в исследуемом ряду фактическое значение коэффициента автокорреляции r(1) сопоставляется с табличным (критическим) для 5%-ного уровня значимости (вероятности допустить ошибку при принятии нулевой гипотезы о независимости уровней ряда). Если фактическое значение коэффициента автокорреляции меньше табличного, то гипотеза об отсутствии автокорреляции в ряду может быть принята, а если фактическое значение больше табличного — делают вывод о наличии автокорреляции в ряду динамики.

Соответствие рада остатков нормальному закону распределения можно проверить с помощью RS-критерия:

$$\mathbf{RS}=(\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min})/S_\varepsilon, \qquad (9)$$

где ε_{max} и ε_{min} — соответственно максимальный и минимальный уровни ряда остатков;

S_ε — среднеквадратическое отклонение ряда остатков.

Если расчетное значение RS попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается. В этом случае допустимо строить доверительный интервал прогноза.

Если все пункты проверки дают положительный результат, то выбранная трендовая модель является адекватной реальному ряду экономической динамики, и, следовательно, ее можно использовать для построения прогнозных оценок. В противном случае — модель надо улучшать.

1.4. Построение точечных и интервальных прогнозов.

Идея социально-экономического прогнозирования базируется на предположении, что закономерность развития, действовавшая в прошлом (внутри ряда экономической динамики), сохранится и в прогнозируемом будущем. В этом смысле прогноз основан на *экстраполяции.* Экстраполяция, проводимая в будущее, называется *перспективной,* а в прошлое — *ретроспективной.*

Прогнозирование методом экстраполяции базируется на следующих предположениях:

а) развитие исследуемого явления в целом описывается плавной кривой;

б) общая тенденция развития явления в прошлом и настоящем не указывает на серьезные изменения в будущем;

в) учет случайности позволяет оценить вероятность отклонения от закономерного развития.

Поэтому надежность и точность прогноза зависят от того, насколько близкими к действительности окажутся эти предположения, и насколько точно удалось охарактеризовать выявленную в прошлом закономерность.

На основе построенной модели рассчитываются точечные и интервальные прогнозы. Точечный прогноз на основе временных моделей получается подстановкой в модель (уравнение тренда) соответствующего значения фактора времени, т.е. $t = n + 1, n + 2, ..., n + k$.

Точное совпадение фактических данных и прогностических точечных оценок, полученных путем экстраполяции кривых, характеризующих тенденцию, имеет малую вероятность. Возникновение соответствующих отклонений объясняется следующими причинами.

1. Выбранная для прогнозирования кривая не является единственно возможной для описания тенденции. Можно подобрать такую кривую, которая дает более точные результаты.

2. Прогноз осуществляется на основании ограниченного числа исходных данных. Кроме того, каждый исходный уровень обладает еще и случайной компонентой. Поэтому и кривая, по которой осуществляется экстраполяция, также будет содержать случайную компоненту.

3. Тенденция характеризует движение среднего уровня ряда динамики, поэтому отдельные наблюдения могут от него отклоняться. Если такие отклонения наблюдались в прошлом, то они будут наблюдаться и в будущем.

Интервальные прогнозы строятся на основе точечных прогнозов. *Доверительным интервалом* называется такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью утверждать, что он содержит значение прогнозируемого показателя. Ширина интервала зависит от качества модели, т.е. степени ее близости к фактическим данным, числа наблюдений, горизонта прогнозирования и выбранного пользователем уровня вероятности.

При построении доверительного интервала прогноза рассчитывается величина $U(k)$, которая для линейной модели имеет вид

$$\mathbf{U(k)=S_{Y}\cdot t_{\alpha}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(n+k-\bar{t})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}}}, \qquad (10)$$

где

$$\mathbf{S_{\hat{Y}}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{t=1}^{n}\varepsilon_t^{2}}{n-m-1}}; \qquad (11)$$

$\mathbf{S_{Y}}$; — стандартная ошибка (среднеквадратическое отклонение от модели);

m — количество факторов в модели, для линейной модели m = 1.

Коэффициент $\mathbf{t_{\alpha}^{1}}$ является табличным значением t-статистики Стьюдента при заданном уровне значимости и числе наблюдений. Если исследователь задает уровень вероятности попадания прогнозируемой величины внутрь доверительного интервала, равной 70%, то при n = 9 $\mathbf{t_{\alpha}}$ = 1,12. При вероятности, равной 95%, $\mathbf{t_{\alpha}}$ = 2,36.

Для других моделей величина U(k) рассчитывается аналогичным образом, но имеет более громоздкий вид. Как видно из формулы (10), величина U зависит прямо пропорционально от точности модели, коэффициента доверительной вероятности $\mathbf{t_{\alpha}}$ степени углубления в будущее на k шагов вперед, т.е. на момент t= n + k, и обратно пропорциональна объему наблюдений. Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

- верхняя граница прогноза = $Y_{\text{прогн.}}$(n+k)+U(k);
- нижняя граница прогноза = $Y_{\text{прогн.}}$(n+k)-U(k);

Если построенная модель адекватна, то с выбранной пользователем вероятностью можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина попадает в интервал, образованный верхней и нижней границей.

После получения прогнозных оценок необходимо убедиться в их разумности и непротиворечивости оценкам, полученным иным способом.

Использование надстройки EXCEL «анализ данных» для моделирования временных рядов

При решении задач рекомендуется использовать стандартную офисную программу Excel. Пакет анализа в Excel — это надстройка, которая предоставляет широкие возможности для проведения статистического анализа.

Установка Пакета анализа

Ни в одном меню стандартной конфигурации программы Excel вы не найдете указания на Пакет анализа. Даже после установки с компакт-диска Excel он не появится в меню Сервис до тех пор, пока вы не выполните следующие действия:

1) выберите команду Сервис => Надстройки;

2) в диалоговом окне Надстройки (рис. 2) установите флажок Пакет анализа, а затем нажмите кнопку ОК;

3) выберите команду Сервис => Анализ данных. Если в меню отсутствует команда Анализ данных, то необходимо выполнить установку Пакета анализа с компакт-диска Excel. После этого в нижней части меню Сервис появится новая команда Анализ данных, которая предоставляет доступ к средствам анализа. Для активизации надстройки Пакет анализа следует установить соответствующий флажок.

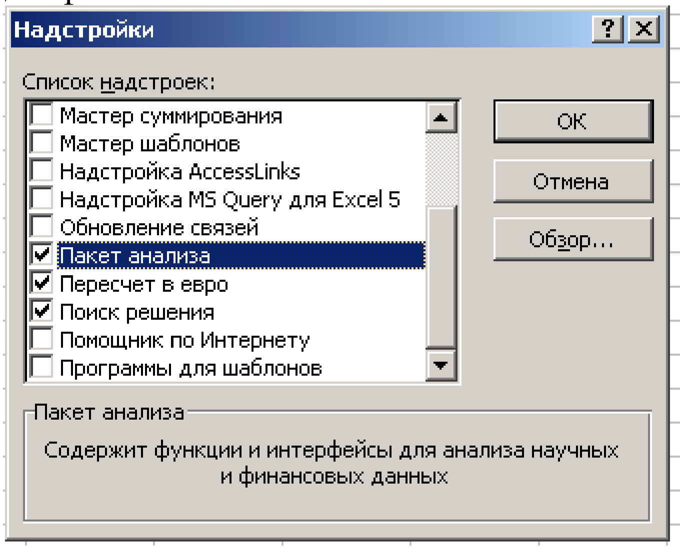


Рис. 2. Установка Пакета анализа

Пример 3.1. *Проверка наличия тренда.*

Один из способов проверки обнаружения тренда основан на сравнении средних уровней ряда: временной ряд разбивают на две примерно равные по числу уровней части, каждая из которых рассматривается как некоторая самостоятельная выборочная совокупность, имеющая нормальное распределение. Если временной ряд имеет тенденцию к тренду, то средние, вычисленные для каждой совокупности, должны существенно (значимо) различаться между собой. Если же расхождение незначительно, несущественно (случайно), то временной ряд не имеет тенденции. Таким образом, проверка наличия тренда в исследуемом ряду сводится к проверке гипотезы о равенстве средних двух нормально распределенных совокупностей.

Определим наличие основной тенденции (тренда) по данным табл. 1.

Таблица 1

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайность	14,1	9,3	19,4	19,7	5,4	24,2	13,8	24,5
Годы	9	10	11	12	13	14	15	
Урожайность	14,7	16,6	5,6	16,2	25,3	11,9	18,5	

Решение

1. Делим исходный временной ряд на две примерно равные по числу уровней части: $n_1 = 7$, $n_2 = 8$ ($n_1 + n_2 = n = 15$)-

2. Для каждой из этих частей вычисляем средние значения: $Y_1 = 15{,}13$; $Y_2 = 16{,}66$ и дисперсии:

$$s^2{y1} = 42{,}5; \qquad s^2{y2} = 41{,}22$$

4. Тогда можно проверить основную гипотезу о равенстве средних значений с использованием t-критерия Стьюдента:

$$t = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \qquad (12)$$

подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{15{,}13 - 16{,}66}{\sqrt{6\cdot 42{,}146 + 7\cdot 41{,}22}} \cdot \sqrt{\frac{7\cdot 8\cdot 13}{15}} = -0{,}46,$$

$$t_{кр}(0{,}05; 13) = 2{,}16$$

Так как $|t_{расч}| < t_{кр})$ то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве средних, расхождение между вычисленными средними незначимо. Отсюда вывод: тренд урожайности ячменя отсутствует.

Решение задачи с помощью Пакета анализа Excel

1. Гипотезу о равенстве дисперсий проверим с помощью F-теста, который можно найти среди инструментов Анализа данных (рис. 3).

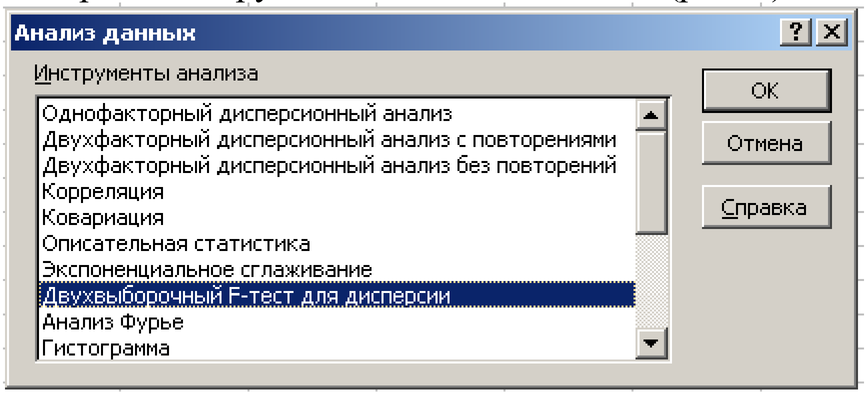


Рис. 3 Вызов надстройки Excel Анализ данных

2. Вводим данные для выполнения .F-теста, указывая интервал для первой и второй переменных (рис. 4). Результат выполнения теста приведен в табл. 2. Анализируя результаты выполнения двухвыборочного F-теста для проверки гипотезы о равенстве дисперсий, приходим к выводу, что исправленные выборочные дисперсии (S^2_{y2} и S^2_{y1}) различаются незначимо.

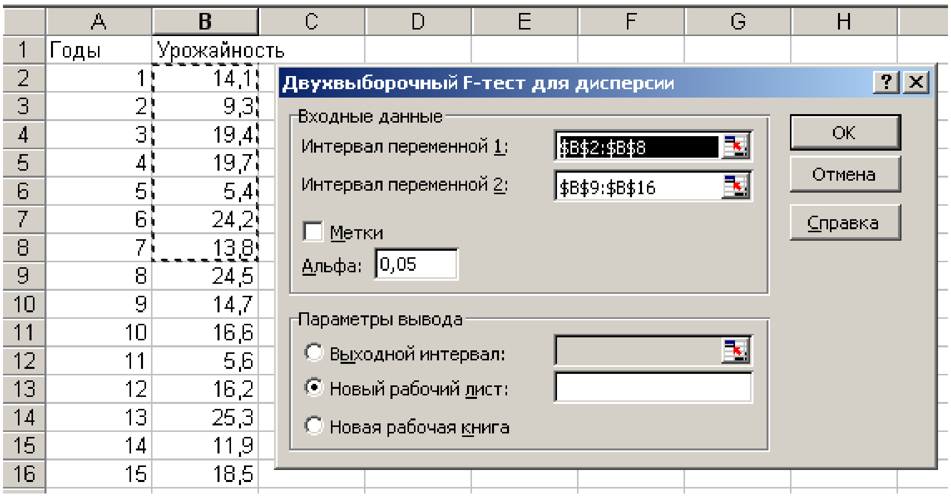


Рис. 4. Ввод данных для двухвыборочного F-теста

Таблица 2 Результат выполнения двухвыборочного F-теста для дисперсии

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Переменная	*ременная 2*
Среднее	15,12857	16,6625
Дисперси:	42,14571	41,21982
Наблюден	7	8
df	6	7
F	1,022462	
P(F<=f) од	0,480969	
F критичес	3,865978	

3. Выбираем инструмент анализа Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями (рис. 5.). Вводим данные. Результат выполнения t-теста приведен в табл. 3, анализируя который убеждаемся, что тренда нет.

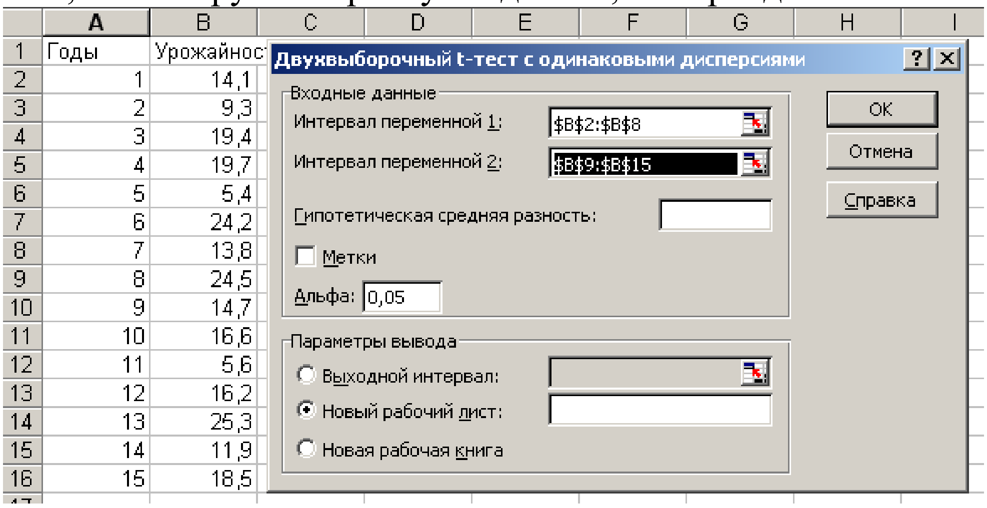


Рис. 5. Ввод данных для двухвыборочного t-теста с одинаковыми дисперсиями

Таблица 3.

Результат выполнения t-теста

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
	Переменная	*ременная 2*
Среднее	15,12857	16,6625
Дисперси:	42,14571	41,21982
Наблюден	7	8
Объедине	41,64716	
Гипотетич	0	
df	13	
t-статисти	-0,45926	
P(T<=t) од	0,326815	
t критичес	1,770932	
P(T<=t) дв	0,653631	
t критичес	2,160368	

Пример 3.2. На основании данных, приведенных в табл. 4. требуется:

1) построить линейную модель $\mathbf{Y(t)} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{t}$, параметры которой оценить МНК;

2) оценить адекватность построенной модели на основе исследования:

• случайности остаточной компоненты по критерию пиков;

• независимости уровней ряда остатков по d-критерию (в качестве критических значений следует использовать уровни d_1 = 1,08 и d_2 = 1,36) и по первому коэффициенту автокорреляции, критический уровень которого

r(1) = 0,36;

• нормальности распределения остаточной компоненты по RS – критерию с критическими уровнями 2,7—3,7;

3) для оценки точности модели используйте среднеквадратическое отклонение и среднюю по модулю относительную ошибку;

4) построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (для вероятности *P*= 70% используйте коэффициент равный 1,12);

5) отобразить на графике фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Таблица 4

Исходные данные

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	41	46	49	48	65	55	61	59	65

Решение

1. Ввод исходных данных.

Сделаем это способом, который был описан раньше.

2. Оценка параметров модели.

2.1. Оценка параметров модели с помощью надстройки EXCEL Анализ данных.

Построим линейную однопараметрическую модель регрессии Y от t. Для проведения регрессионного анализа выполните следующие действия:

- выберите команду Сервис =» Анализ данных;

- в диалоговом окне Анализ данных выберите инструмент Регрессия , а затем щелкните на кнопке ОК;

- в диалоговом окне Регрессия в поле Входной интервал Y введите адрес одного диапазона ячеек, который представляет зависимую переменную. В поле Входной интервал X введите адрес диапазона, который содержит значения независимой переменной t;

- если выделены и заголовки столбцов, то установите флажок Метки в первой строке;

- выберите параметры вывода. В данном примере — Новая рабочая книга;

- в поле График подбора поставьте флажок;

- в поле Остатки поставьте необходимые флажки и нажмите кнопку ОК.

- в поле График подбора поставьте флажок;

- в поле Остатки поставьте необходимые флажки и нажмите кнопку ОК.

Результат ввода данных, выбора инструмента Регрессия и ввод необходимых атрибутов этого инструмента показан на рис. 6.

Результат регрессионного анализа содержится в виде таблицы на рис. 7.

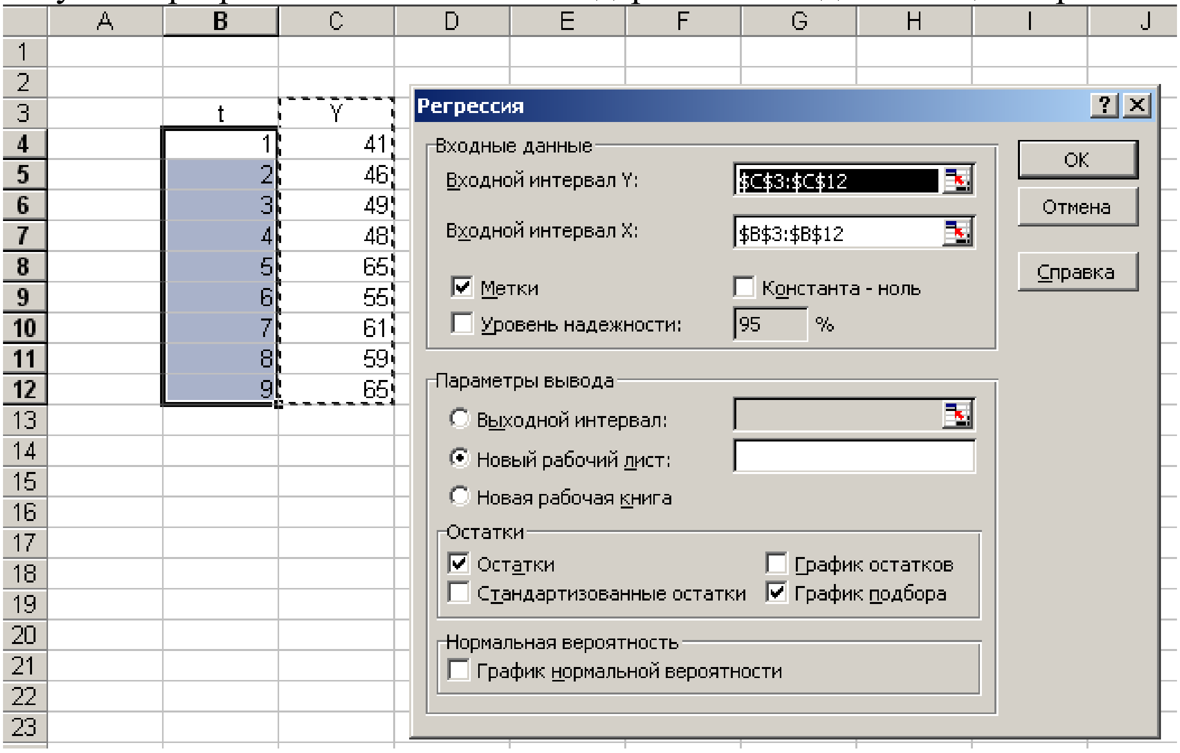


Рис.6. Ввод исходных данных для Регрессии

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	ачимость F
Регрессия	1	459,2667	459,2667	21,32817	0,002431
Остаток	7	150,7333	21,53333		
Итого	8	610			

	Коэффициент	дартная о	татистик	Р-Значение	ижние 95%	ерхние 95%	ижние 95,0	рхние 95,0
Y-пересеч	40,5	3,371174	12,01362	6,31E-06	32,52845	48,47155	32,52845	48,47155
t	2,766667	0,599073	4,618244	0,002431	1,350084	4,183249	1,350084	4,183249

ВЫВОД ОСТАТКА

аблюдени	дсказанно	Остатки
1	43,26667	-2,26667
2	46,03333	-0,03333
3	48,8	0,2
4	51,56667	-3,56667
5	54,33333	10,66667
6	57,1	-2,1
7	59,86667	1,133333
8	62,63333	-3,63333
9	65,4	-0,4

Рис.7. Результат регрессионного анализа

В таблице содержатся коэффициенты уравнения регрессии, стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии, t-статистика, используемая для проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Уравнение регрессии зависимости *у,* (прибыль коммерческого банка) от t (время) имеет вид

Y(t) = 40,5 + 2,77*t.

При вычислении «вручную» по формуле (4) получаем те же результаты.

<u>Оценка качества построенной модели.</u>

Для этого исследуем адекватность модели. Модель является адекватной, если математическое ожидание значений остаточного ряда близко или равно нулю и если значения остаточного ряда случайны, независимы и подчинены нормальному закону распределения.

- При проверке независимости (отсутствие автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей, например, с помощью d-критерия Дарбина— Уотсона по формуле (7):

$$\mathbf{d} = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}\left[\varepsilon_{(t)} - \varepsilon_{(t-1)}\right]^2}{\sum\limits_{t=1}^{n}\varepsilon_{(t)}^2} = \mathbf{2{,}84},$$

$d^{|}$= 4 - 2,84 = 1,16.

Так как d' попало в интервал от d_1до d_2, то по данному критерию нельзя сделать вывод о выполнении свойства независимости.

Необходимо вычислить коэффициент автокорреляции первого порядка по формуле (8):

$$r(\mathbf{1}) = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} = -\mathbf{0{,}44},$$

т.е. фактическое значение больше табличного. Это означает, что в ряду динамики имеется автокорреляция, следовательно, модель по этому критерию неадекватна.

- Проверку случайности уровней ряда остатков проведем на основе критерия поворотных точек (формула (6)). Количество поворотных точек равно 6 (рис. 3.11). Неравенство выполняется *(6 > 2).* Следовательно, свойство случайности выполняется. Модель по этому критерию адекватна.

- *Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения* определим при помощи RS-критерия:

$$\mathbf{RS} = \left[\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}\right] / S_{\varepsilon}$$

где ε_{max} — максимальный уровень ряда остатков, ε_{max} = 10,67;

ε_{min} - минимальный уровень ряда остатков, ε_{min} = —3,63;

S_{ε} — среднеквадратическое отклонение,

$$\mathbf{RS} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2_{(t)}}{\mathbf{n}-\mathbf{1}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{150{,}73}}{\mathbf{8}}} = \mathbf{4{,}34};$$
$$\mathbf{RS} = [\mathbf{10{,}67} - (-\mathbf{3{,}63})]/\mathbf{4{,}34} = \mathbf{3{,}28}.$$

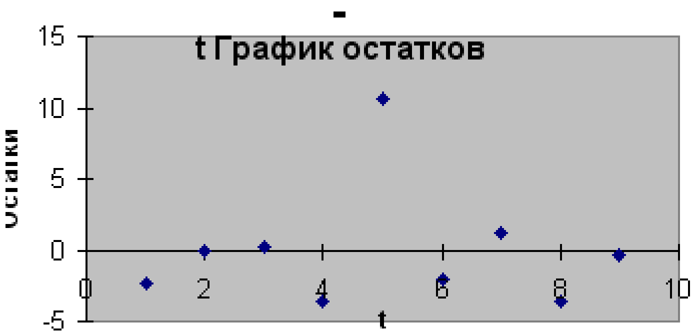


Рис. 8. График остатков

Расчетное значение попадает в интервал (2,7—3,7), следовательно, выполняется свойство нормальности распределения. Модель по этому критерию адекватна.

• *Проверка равенства нулю математического ожидания уровней ряда остатков.*

В нашем случае $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, поэтому гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю выполняется.

В табл. 5 собраны данные анализа ряда остатков.

Таблица 5

Анализ ряда остатков

Проверяемое свойство	Используемые остатки		Граница		Вывод
	наименование	значение	нижняя	верхняя	
Независимость	d-критерий Дарбина – Уотсона r(1) – коэффициент автокорреляции	d=2,84 d_n=4-2,84=1,16 -0,44	0,98	1,36 0,36	Нельзя сделать вывод по этому критерию abs[r(1)]>0,36 неадекватна abs[r(1)]>0,36 Нет
Случайность	Критерий пиков (поворотных точек)	6>2	2		адекватна
Нормальность	RS – критерий	3,28	2,6	2,7	адекватна

Среднее=0 ?	t – статистика Стьюдента	0,000	-2,179	2,179	адекватна
Вывод: модель статистически неадекватна					

4. Построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (для вероятности 70% использовать t = 1,12):

$$Y_{10} = a_0 + a_1 \cdot t = 10{,}45 + 2{,}77 \cdot 10 = 68{,}17,$$

$$Y_{11} = a_0 + a_1 \cdot t = 40{,}5 + 2{,}77 \cdot 11 = 70{,}93.$$

Для построения интервального прогноза рассчитаем доверительный интервал. Примем значение уровня значимости a = 0,3, следовательно, доверительная вероятность равна 70%, а критерий Стьюдента при ν = *n* - 2 = 7 равен 1,12. Ширину доверительного интервала вычислим по формуле (10):

$$U(k) = S_Y \cdot t_\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n+k-\bar{t})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}},$$

$$S_{\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{t-1}^{n}\varepsilon_t^2}{n-m-1}} = 4{,}64, \quad t_a = 1{,}12, \quad \bar{t} = 5, \quad \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 = 60.$$

$$U(1) = 4{,}64 \cdot 1{,}12 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+1-5)^2}{60}} = 6{,}42,$$

$$U(2) = 4{,}64 \cdot 1{,}12 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+2-5)^2}{60}} = 6{,}79.$$

Далее вычисляем верхнюю и нижнюю границы прогноза.

Таблица 6

N+k	U(k)	Прогноз	Формула	Верхняя граница	Нижняя граница
10 11	U(1)=6,42 U(2)=6,79	68,17 70,93	Прогноз +U(1) Прогноз-U(2)	74,59 77,73	61,75 64,14

5. Отобразить на графике фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Для этого следует преобразовать график подбора, который был получен с помощью инструмента Регрессия (рис. 9).

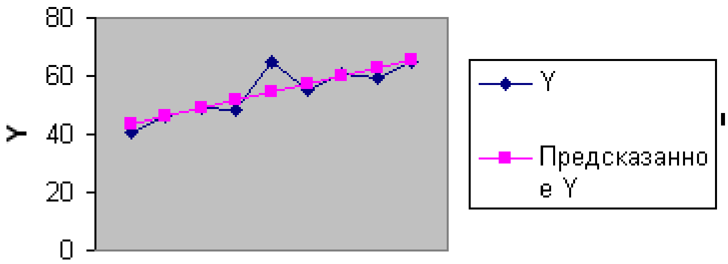


Рис. 9 График подбора

Анализ временных рядов с помощью инструмента мастер диаграмм

При анализе временных рядов широко применяются графические методы. Это объясняется тем, что табличное представление временного ряда и описательные характеристики не позволяют понять характер процесса, а по графику временного ряда можно сделать определенные выводы, которые потом могут быть проверены с помощью расчетов:

- наличие тренда и его характер;
- наличие сезонных и циклических компонент;
- степень плавности или прерывистости изменений последовательных значений ряда после устранения тренда. Так графический анализ ряда обычно задает направление его дальнейшего анализа. В Excel для этого можно использовать средство Мастер диаграмм.

Для создания диаграммы с помощью средства Мастер диаграмм необходимо выделить данные, которые будут отображены на диаграмме (это необязательная операция, однако она позволит сэкономить время при работе мастером). Сюда следует включить как числовые данные, так и подписи к рисункам. Excel автоматически распознает подписи и использует их при построении Диаграммы. Пример рабочего листа, соответствующая часть которого (ячейки A2:A17) будет выделена для Мастера диаграмм, показан на рис. 10.

	A	B	C	D
1	Индекс потребительских расходов			
2	100			
3	98,4			
4	101,2			
5	103,5			
6	104,1			
7	107			
8	107,4			
9	108,5			
10	108,3			
11	109,2			
12	110,1			
13	110,7			
14	110,3			
15	111,8			
16	112,3			
17	112,9			

Рис. 10. Выделение данных перед началом работы с Мастером диаграмм

Работа Мастера диаграмм состоит из четырех основных шагов, выполнение которых рассмотрим на следующем примере.

Пример Построить график временного ряда *Индекс потребительских расходов,* выделить тренд этого временного ряда и сделать прогноз на два шага вперед. Исходные данные по этому временному ряду за 16 месяцев приведены в табл. 7.

Таблица 3.10

Индекс потребительских расходов

1	2	3	4	5	6	7	8
100	98,4	101,2	103,5	104,1	107	107,4	108,5
9	10	11	12	13	14	15	16
108,3	109,2	110,1	110,7	110,3	111,8	112,3	112,9

Шаг 1. Выбор типа и вида диаграммы. Во вкладке Стандартные можно увидеть основные типы диаграмм. На рис. 11 на вкладке Стандартные выделен тип График. Выбрав вид График с маркерами, необходимо нажать на кнопку Далее.

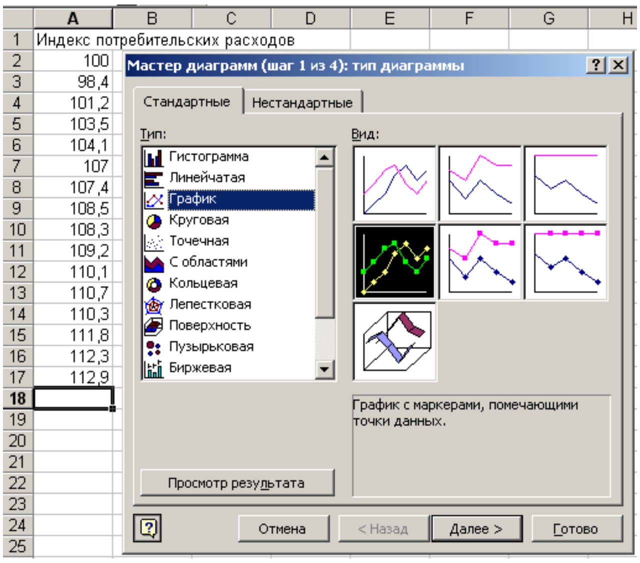


Рис. 11. На первом этапе выбирается тип создаваемой диаграммы

Шаг 2. Выбор и уточнение ориентации диапазона данных и рада. На экране появилось диалоговое окно, показанное на рис. 12. Вкладка Диапазон данных позволяет выполнить следующие операции:

- выбрать (или изменить) диапазон данных листа. Если перед началом работы с Мастером диаграмм данные не были выделены, то, используя это поле, можно выбрать их сейчас;
- уточнить ориентацию диапазона данных диаграммы с помощью переключателя Ряды в строках и столбцах. При выборе переключателя В строках строки рабочего листа будут рассматриваться как ряды диаграммы, а при выборе переключателя В столбцах — рядами диаграммы будут столбцы данных.

Вкладка Ряд позволяет управлять параметрами каждого ряда диаграммы. С ее помощью можно выполнить следующие операции:

- добавлять и удалять ряды;
- присваивать рядам имена;
- выделять (или переопределять) данные, используемые для построения рядов;
- изменять подписи категорий.

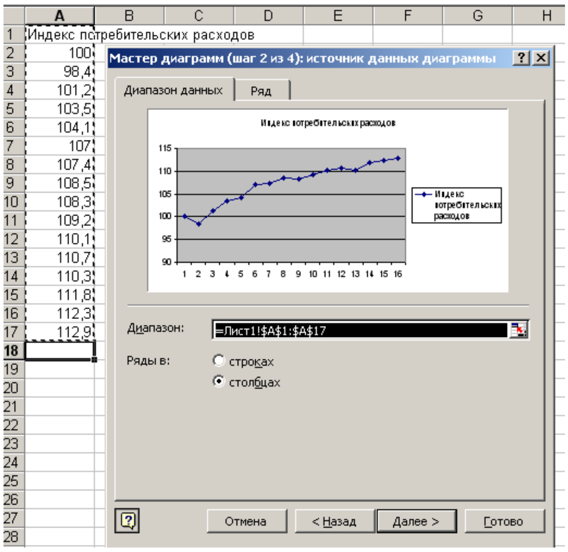


Рис.12. Вкладка диапазон данных

Шаг 3. Настройка диаграммы. Это наиболее сложный этап работы Мастера диаграмм. В появившемся диалоговом окне предлагается большое количество самых различных параметров диаграммы (рис. 13). Если параметры не изменяются, то используется установленное по умолчанию значение.

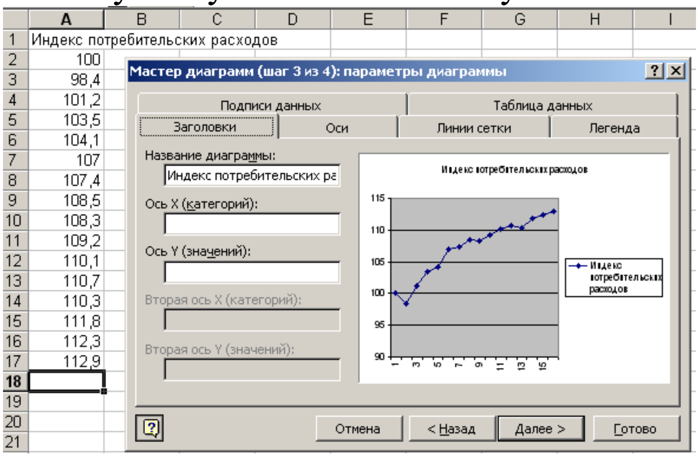


Рис.13. Диалоговое окно Мастера диаграмм.

Шаг 4. Выбор месторасположения диаграммы. На этом шаге определяется месторасположение созданной диаграммы (рис. 14).

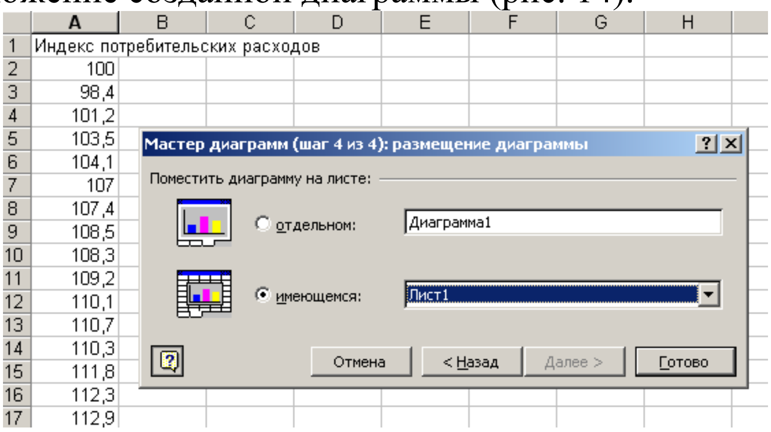


Рис.14. Диаграмма будет расположена на одном листе с исходными данными

На рис. 15 приведен результат работы Мастера диаграмм. Excel предоставляет дополнительные возможности по работе с диаграммами. Наиболее полезной с точки зрения анализа временных рядов представляется возможность создания линий тренда.

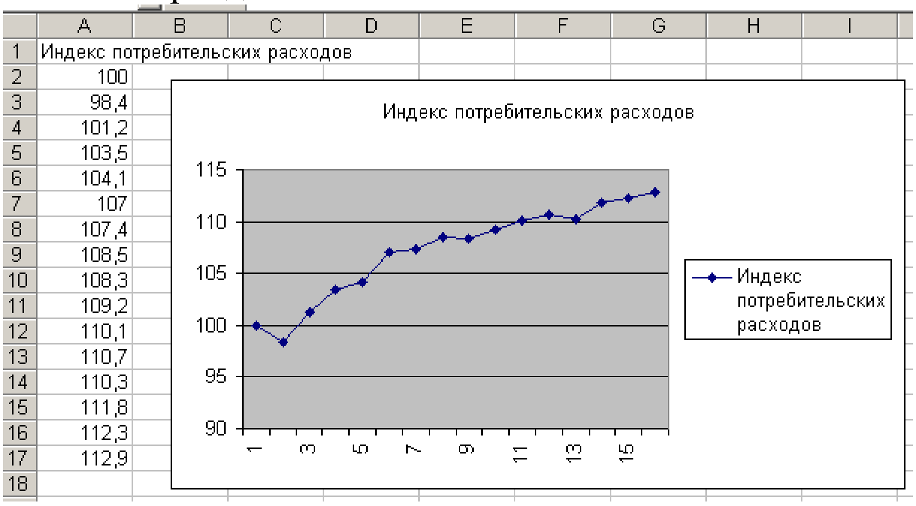


Рис. 15. Результат работы Мастера диаграмм.

Новая диаграмма внедрена как объект в рабочий лист

Построение линий тренда

Для описания закономерностей в исследуемом временном ряду строятся линии тренда. В табл. 7 приведены типы линий тренда, используемые в Excel.

Таблица 7

Типы линий тренда и их математические уравнения

Тип зависимости	Уравнение
Линейная	$\mathbf{Y = a_0 + a_1 \cdot X}$
Полиномиальная	$\mathbf{Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + ... + a_n \cdot X_n}$
Логарифмическая	$\mathbf{Y = a \cdot ln(X) + b}$
Экспоненциальная	$\mathbf{Y = a \cdot exp(b \cdot x)}$
Степенная	$\mathbf{Y = a \cdot x^b}$

Для добавления линии тренда в диаграмму выполните следующие действия:

1) щелкните правой кнопкой мыши на одном из рядов диаграммы;

2) выберите команду Добавить линию тренда из контекстного меню. На экране появится диалоговое окно Линия тренда (рис. 16);

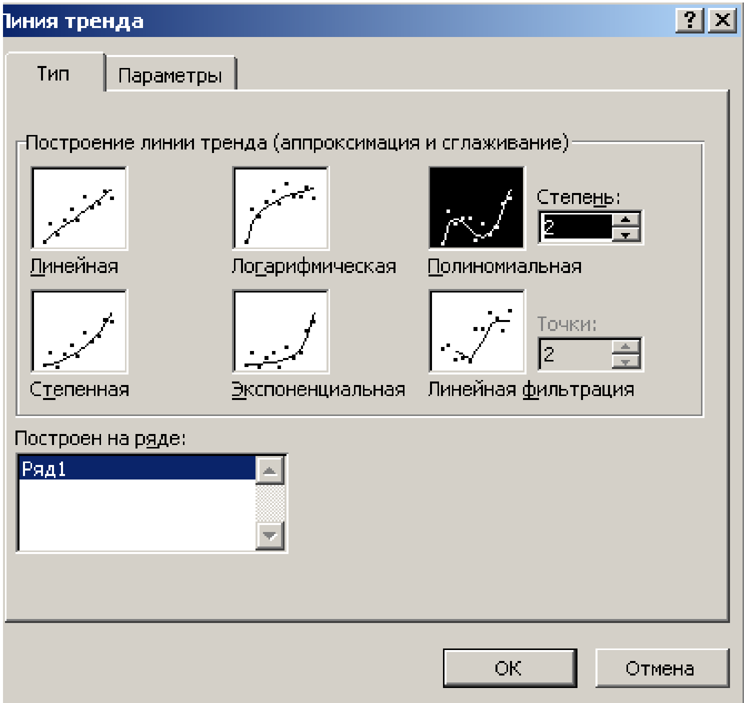


Рис.16. Вкладка Тип используется для выбора типа создаваемой линии тренда

3) выберите тип регрессии. Если это Полиномиальная регрессия введите значение степени в поле Степень. Если же вы выбрали тип Скользящее среднее (который не является регрессией), то в поле Точки введите число точек, необходимых для вычисления средней величины;

4) убедитесь в том, что ряд, для которого необходимо построить линию тренда, выделен в списке Построение линии тренда на ряде. Если нет, то выделите его, а затем переключитесь на вкладку Параметры (рис. 17);

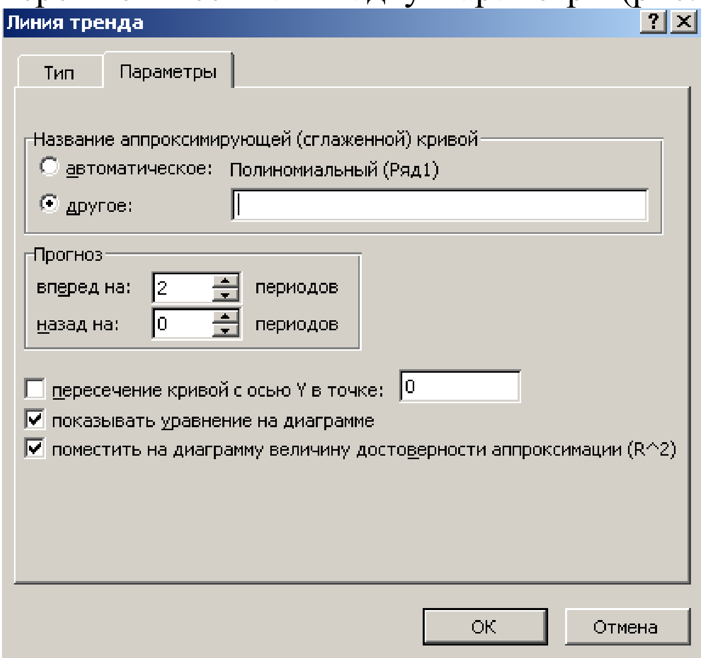


Рис.17. Установка остальных параметров линии тренда выполняется с помощью вкладки Параметры

5) в разделе Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой установите переключатель Автоматическое или Другое, после чего введите название кривой. Оно появится в легенде диаграммы;

6) если линия тренда создается с помощью регрессии (т.е. на вкладке выбран любой тип, кроме скользящего среднего), то в соответствующих полях можно ввести прогнозируемое количество периодов, которые будут добавлены к линии тренда;

7) в случае необходимости можете установить и остальные параметры (они могут быть доступны или недоступны в зависимости от выбранного типа регрессии). Так, можно установить

пересечение с осью *У,* отображение на диаграмме уравнения или

величины достоверности аппроксимации (R2)[1];

8) щелкните на кнопке ОК для завершения процесса создания линии тренда.

На рис. 18 приведен результат построения тренда для временного ряда *Индекс потребительских расходов.* В качестве аппроксимирующей функции выбран полином второй степени (парабола), по которой построен графический прогноз на два шага вперед.

• Полиномиальный (Индекс потребительских расходов)

$y = -0{,}0488x^2 + 1{,}739x + 97{,}008$

$R^2 = 0{,}9664$

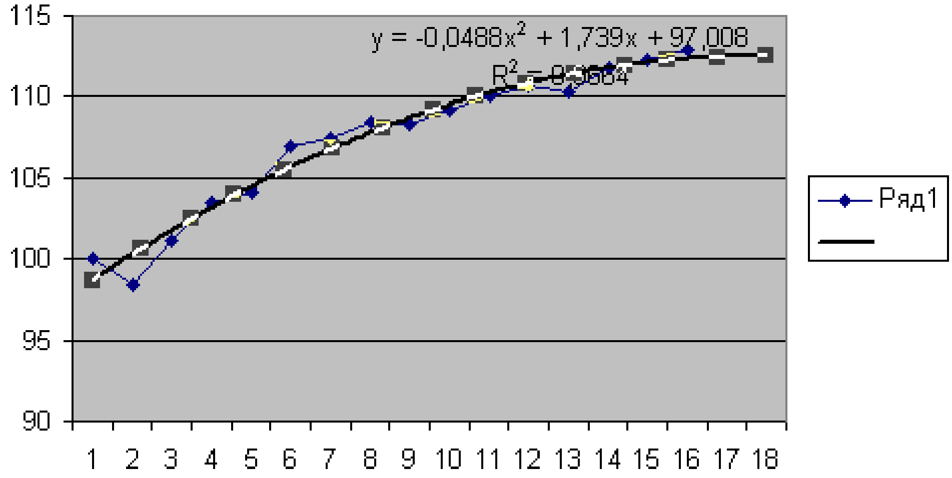


Рис. 17. Результат прогнозирования по тренду

$У = 97{,}008 + 1{,}739 \cdot t - 0{,}0488 \cdot t^2$

Глава 4. Модели управления запасами

Принципиальные системы регулирования товарных запасов.

В практической деятельности организации используют более простые системы регулирования товарных запасов, основанные на различных стратегиях пополнения запасов. В качестве параметров в этих системах принимаются величина имеющихся на складе запасов, допустимые колебания уровня запасов, размеры заказа на пополнение запасов, его периодичность и др.

Система с фиксированным размером заказа. Это наиболее распространённая система, в которой размер заказа на пополнение запасов – постоянная величина, а поставка очередной партии товара осуществляется при уменьшении наличных запасов до определённого критического уровня, называемой точкой заказа. Регулирующими параметрами системы являются:

- точка заказа, т.е. фиксированный уровень запаса, при снижении до которого организуется заготовка очередной партии товара;
- размер заказа – величина партии поставки.

Система с фиксированной периодичностью заказа.

При этой системе заказы на очередную поставку товарного запаса повторяются через равные промежутки времени.

Регулирующие параметры этой системы:

- максимальный уровень запасов, до которого осуществляется их пополнение;
- продолжительность периода повторения заказов.

Эта система эффективна, когда имеется возможность пополнять запас в различных размерах и затраты на оформление заказа любого размера невелики.

Система с двумя фиксированными уровнями запасов и фиксированной периодичностью заказа

В этой системе допустимый уровень запасов регулируется сверху и снизу. В данной системе имеется три регулирующих параметра:

- максимальный уровень запаса;
- нижний уровень запаса;
- длительность периода между заказами.

Система с двумя фиксированными уровнями запасов без постоянной периодичности заказа (s, S) стратегия управления запасами.

Если через x обозначить величину запасов до принятия решения об их пополнении, через P – величину пополнения, а через y=x+p – величину запасов после пополнения, то (s, S) – стратегия управления запасами задаётся функцией

$$\mathbf{y(x)} = \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{при\ x > S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{при\ x \le S} \end{cases}, \qquad (6.1)$$

Пополнение не происходит, если имеющийся уровень запасов больше критического уровня S, если имеющийся уровень меньше или равен S, то принимается решение о пополнении запаса обязательно до верхнего уровня S, так что величина пополнения равна P=S-x.

Пример. Пусть при пополнении запасов автомобилей на складе служба маркетинга магазина «Автомобили» придерживается (s, S)-стратегии при s=50, S=300. Требуется определить, на какое количество автомобилей надо оформить заказ, если к моменту принятия решения о заказе на складе: а) 40, б) 70, в) 150, г) 10, д) 290 автомобилей (временем доставки заказанных автомобилей пренебрег.).

В соответствии с формулой (9.15) величина P в каждом из рассматриваемых случаев будет равна: а) 260, б) 0, в) 0, г) 290, д) 0 автомобилей.

Саморегулирующие системы

Рассмотренные выше системы регулирования запасов предполагают относительную неизменность условий существования. На практике такое постоянство условий встречается редко, что вызвано изменениями потребности в товарных запасах, условиями их поставки и т.д. В связи с этим возникает необходимость создания комбинированных систем с возможностью саморегулирования (адаптации к изменяющимся условиям).

В качестве целевой функции в моделях управления запасами чаще всего используется минимум затрат, связанный с заготовкой и хранением запасов, а также потери от дефицита.

Одним из элементов целевой функции при построении саморегулирующихся систем управления запасами являются затраты, связанные с организацией заказа и его реализацией, начиная с поиска поставщика и кончая оплатой всех услуг по доставке товарных запасов на склад.

Другой элемент целевой функции – затраты, связанные с хранением запаса. При расчётах обычно пользуются удельной величиной издержек хранения, равной издержкам на единицу хранимого товара в единицу времени. При этом предполагают, что издержки хранения за календарный период пропорциональны размеру запасов и длительности периода между заказами и обратно пропорциональны количеству заказов за этот период.

Третьим элементом рассматриваемой целевой функции являются потери из-за дефицита, когда снабженческо-сбытовая организация несёт убытки из-за отсутствия запасов.

Модель экономически выгодных размеров заказываемых партий товара

Эффективность работы склада оценивается по его затратам на пополнение запаса и их хранению. Расходы, не зависящие от объёма партии, называют накладными. Сюда входят почтово-телеграфные расходы, командировочные, некоторая часть транспортных расходов и др. Накладные расходы обозначим – k. Издержки хранения запасов будем считать пропорциональными величине хранящихся запасов и времени их хранения. Издержки на хранение одной единицы запасов в течении одной единицы времени называются величиной удельных издержек хранения, обозначим их – h.

Затраты склада за время T при размере партии пополнения Q в случае идеального режима работы склада будут равны:

$$\mathbf{Z_T(Q) = K + h \times T \times Q/2}$$

После деления этой функции на постоянную величину T с учётом, что Q=MT получим выражение для величины затрат на пополнение и хранение запасов, приходящихся на единицу времени:

$$\mathbf{Z_1(Q) = Z_T(Q)/T = K/T + h \cdot Q/2 = K \cdot M/Q + h \cdot Q/2} \qquad (6.2)$$

Это и будет целевой функцией, минимизация которой позволит указать оптимальный режим работы склада.

Определим объём заказываемой партии Q, при котором минимизируется функция средних затрат склада за единицу времени, т.е. функция $Z_T(Q)$. На практике Q часто принимает дискретные значения, в частности, из-за использования транспортных средств определённой грузоподъёмности, в этом случае оптимальное значение Q находят перебором допустимых значений Q. Будем считать, что ограничений на принимаемые значения Q нет, тогда задачу на минимум функции $\mathbf{Z_1(Q)}$ можно решить методами дифференциального исчисления, так как она выпукла (рис. 6.1)

$$\mathbf{\frac{dZ_1}{dQ} = \frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0},$$

откуда находим точку минимума $Q_{опт}$;

$$\mathbf{Q_{опт} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}}}, \qquad (6,3)$$

Эта формула называется формулой Уилсона.

Оптимальный размер партии, рассчитанный по формуле Уилсона, обладает характеристическим свойством: размер партии Q оптимален тогда и только тогда, когда издержки хранения за время цикла T равны накладным расходам K.

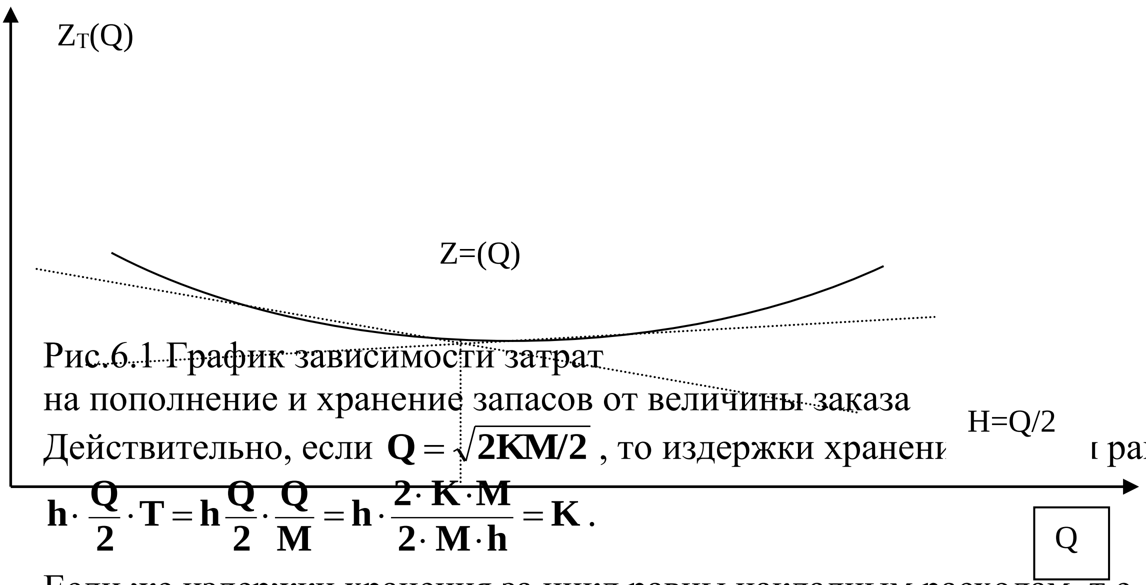


Рис.6.1 График зависимости затрат на пополнение и хранение запасов от величины заказа

Действительно, если $\mathbf{Q = \sqrt{2KM/2}}$, то издержки хранени равны

$$\mathbf{h \cdot \frac{Q}{2} \cdot T = h\frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{M} = h \cdot \frac{2 \cdot K \cdot M}{2 \cdot M \cdot h} = K}.$$

Если же издержки хранения за цикл равны накладным расходам, т.е

$$\mathbf{h \cdot \frac{Q}{2} T = h \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{M} = K}, \text{ то } \mathbf{Q = \sqrt{2 \cdot K \cdot M / h}}.$$

На рис. 8.3 видно, что минимальное значение функции Z_1 (Q) достигается при том значении Q, при котором равны значения двух других функций, её составляющих.

Используя формулу Уилсона (8.38), в сделанных ранее предположениях об идеальной работе склада, можно получить ряд расчётных характеристик работы склада в оптимальном режиме.

Оптимальный средний уровень запаса

$$\overline{Q}_{опт} = Q_{опт}/2 = \sqrt{K \cdot M/2 \cdot h}, \qquad (6,4)$$

Оптимальная периодичность пополнения запасов

$$T_{опт} = Q_{опт}/M = \sqrt{2 \cdot K/M \cdot h}, \qquad (6.5)$$

оптимальные средние издержки хранения запасов в единицу времени

$$\overline{H}_1 = \overline{Q}_{опт.} \cdot h = \sqrt{K \cdot M \cdot h/2}, \qquad (6.6)$$

Глава 5. Моделирование систем массового обслуживания

Многие экономические задачи связаны с системами массового обслуживания (СМО), т.е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, а с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

В организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завозы товаров и другие параметры.

Системы массового обслуживания могут быть классифицированы по ряду признаков.

1. В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:
 - СМО с потерями (отказами),
 - СМО с ожиданием.
2. По числу каналов обслуживания СМО делятся на
 - одноканальные;
 - многоканальные.
3. По месту нахождения источника требований СМО делятся на:
 - разомкнутые, когда источник требования находится вне системы;
 - замкнутые, когда источник находится в самой системе.

Методы и модели, применяющиеся в теории массового обслуживания, можно условно разделить на аналитические и имитационные.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является простейшим (пуассоновским).

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время t равна k требований задаётся формулой:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \qquad (5.1)$$

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последствия.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ), не меняется во времени.

Отсутствие последствия означает, что число требований, поступивших в систему до момента t, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до t+Δt.

Важнейшая характеристика СМО – время обслуживания требований в системе. Время обслуживания одного требования является, как правило, случайной величиной и, следовательно, может быть описано законом распределения. Наибольшее распространение в теории и особенно в практических приложениях получил экспоненциальный закон распределения времени обслуживания. Функция распределения для этого закона имеет вид:

$$\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\mu t}}, \qquad (5.2)$$

μ - параметр экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований в системе, величина, обратная среднему времени обслуживания $\bar{\mathbf{t}}\mathbf{об}$:

$$\mathbf{\mu = 1/\bar{t}_{об}}, \qquad (5.3).$$

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространённых СМО с ожиданием, т.е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, становятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов.

Общая постановка задачи состоит в следующем. Система имеет **n** обслуживающих каналов, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование.

В систему поступает простейший (пуассоновский) поток требований с параметром λ. Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не менее n требований (т.е. все каналы заняты), то это требование становится в очередь и ждёт начала обслуживания.

Время обслуживания каждого требования tоб – случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ.

СМО с ожиданием можно разбить на две большие группы: замкнутые и разомкнутые.

К замкнутым относятся системы, в которых поступающий поток требований возникает в самой системе и ограничен (например, заявка на ремонт станков).

Если питающий источник обладает бесконечным числом требований, то системы называются разомкнутыми (например, магазины, кассы вокзалов, портов и др.)

Расчёт характеристик работы СМО различного вида может быть проведён на основе расчёта вероятностей состояний СМО (так называемые формулы Эрланга).

Рассмотрим алгоритм расчёта показателей качества функционирования разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

При изучении таких систем рассчитывают различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обсаживания и др.

Введём в рассмотрение параметр $\alpha = \lambda / \mu$. Заметим, что если $\alpha / n < 1$, то очередь не может расти безгранично. Условие $\alpha / n < 1$ означает, что число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить все поступившие требования.

Важнейшие характеристики работы СМО:

Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n! \cdot (1 - \alpha / n)} \right]^{-1}, \qquad (5.4)$$

Вероятность того, что занято ровно k обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} * P_0 \quad \text{при } 1 \le k \le n \qquad (5.5)$$

Вероятность того, что в системе находится k требований в случае, когда их число больше числа обслуживающих каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n}} * P_0; \quad \text{при } k \ge n, \qquad (5.6)$$

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты:

$$P_n = \frac{\alpha^k}{n! \cdot (1 - \alpha / n)} * P_0; \quad \text{при } \alpha / n < 1, \qquad (5.7)$$

5. Среднее время ожидания требованиям начала обслуживания в системе:

$$\bar{t}_{ож} = \frac{P_n}{\mu \cdot (n - \alpha)}; \quad \text{при } \alpha / n < 1, \qquad (5.8)$$

6. Средняя длина очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\alpha \cdot P_n}{n \cdot (1 - \alpha / n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n! \cdot n \cdot (1 - \alpha / n)^2} * P_0; \quad \text{при } \alpha / n < 1, \qquad (5.9)$$

7. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$\overline{N}0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \alpha^{k} \cdot P_0, \tag{5.10}$$

8. Коэффициент простоя каналов:

$$K_{np} = \frac{\overline{N_0}}{n}, \tag{5.11}$$

9. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\overline{N}3 = n - N_0, \tag{5.12}$$

10. Коэффициент загрузки каналов

$$K_3 = \frac{\overline{N}3}{n} \tag{5.13}$$